BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

LÊ QUỐC CƯỜNG

PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP BIÊN NHÚNG KẾT HỢP VỚI PHƯƠNG PHÁP PROPER ENERALIZED DECOMPOSITION CHO BÀI TOÁN DÒNG CHẢY NHỚT KHÔNG NÉN ĐƯỢC QUA VẬT THỂ BIÊN CỨNG VÀ BIÊN ĐÀN HỒI

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

NGÀNH: CƠ KỸ THUẬT

MÃ SỐ: 62520101

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 9/2019

CÔNG TRÌNH ĐƯỢC HOÀN THÀNH TẠI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Người hướng dẫn khoa học 1: PGS. TS. Nguyễn Hoài Sơn

Người hướng dẫn khoa học 2: TS. Phan Đức Huynh

Luận án tiến sĩ được bảo vệ trước

HỘI ĐỒNG CHẤM BẢO VỆ LUẬN ÁN TIẾN SĨ

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT.

Ngày ….. tháng ….. năm 2019

CÁC KẾT QUẢ ĐÃ CÔNG BỐ

Chương 2:

1. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Phan Đức Huynh và Nguyễn Bá Duy, "Giải phương trình 3D Biharmonic bằng phương pháp PGD kết hợp HOCFD," *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, 8-9/12/2017, Hà Nội – Việt Nam.*

2. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Nguyễn Bá Duy và Phan Đức Huynh, "Phương pháp PGD kết hợp HOCFD cho bài toán tấm mỏng chịu uốn," *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, 8-9/12/2017, Hà Nội – Việt Nam.*

Chương 3:

1. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Phan Đức Huynh, "Phương pháp Proper Generalized Decomposition cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua một miền vuông," *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc, 2015, 45-52, ISBN: 978-604-84-1272-2.*

2. Huynh, P.D., **Cuong, L.Q, "**The numerical simulation of heat transfer and fluid flow problems by using the proper generalized decomposition method," *Proceedings of the 2012 International Conference on Green Technology and Sustainable Development (GTSD2012), HoChiMinh City, Vietnam, 35-39, 2012.*

Chương 4:

1. **C. Le-Quoc**, Linh A. Le, V. Ho-Huu, P. D. Huynh, and T. Nguyen-Thoi, "An Immersed Boundary Proper Generalized Decomposition (Ib-Pgd) for Fluid–Structure Interaction Problems," *International Journal of Computational Methods*, (2017), 1850045. (ISI)

2. **Lê Quốc Cường**, Phan Đức Huynh, Nguyễn Hoàng Sơn, "Mô phỏng dòng chảy nhớt không nén qua trụ tròn bằng phương pháp biên nhúng kết hợp PGD," *Tạp chí Khoa học và Công nghệ các trường Đại học kỹ thuật*, 2014 (102), 101-105.

3. **Cuong, L.Q,** Huynh, P.D, "Numerically study effectiveness of control surface on aerodynamic of bridge deck by using immersed boundary method," *Proceedings of the 2012 International Conference on Green Technology and Sustainable Development (GTSD2012), HoChiMinh City, Vietnam, 1-5, 2012.*

4. **Lê Quốc Cường**, Phan Đức Huynh, Nguyễn Hoài Sơn và Nguyễn Bá Duy, "Phương pháp IB-PGD dựa trên sơ đồ sai phân bậc hai trên lưới không đều cho các bài toán tương tác rắn – lỏng," *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, 8-9/12/2017, Hà Nội – Việt Nam.*

Chương 5:

1. **Cuong Q. Le**, H. Phan-Duc, Son H. Nguyen, "Immersed Boundary Method Combined With Proper Generalized Decomposition For Simulation Of A Flexible Filament In A Viscous Incompressible Flow," *Vietnam Journal of Mechanics*, 2017 (2), 109-119, ISSN: 0866-7136.

2. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Phan Đức Huynh, "Mô phỏng số tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với sợi đàn hồi bằng phương pháp Proper Generalized Decomposition kết hợp với phương pháp biên nhúng," *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc, 2015, 35-44, ISBN: 978-604-84-1272-2.*

Chương 1
TỔNG QUAN

1.1. Đặt vấn đề

Bài toán tương tác rắn-lỏng (fluid-structure interaction – FSI) là một trong những bài toán được quan tâm trong lĩnh vực khoa học và kỹ thuật. Các bài toán FSI có thể được tìm thấy trong các lĩnh vực như khí động lực học cầu [1, 2], dao động của cánh turbine gió [3-5], tác động của gió lên các tòa nhà cao tầng [6, 7], đáp ứng khí động học của máy bay [8], tương tác giữa gió với cây xanh [9] và nhiều bài toán về dòng chảy sinh học như tương tác giữa máu với van tim [10, 11], các bài toán mô phỏng quá trình bay và bơi của sinh vật [12, 13] …

Do các bài toán FSI là các bài toán vật lý tương tác đa trường nên việc giải quyết các bài toán nói trên sẽ rất khó để thực hiện bằng các phương pháp giải tích, thay vào đó các bài toán FSI thường được giải bằng các phương pháp số. Phương pháp biên nhúng (Immersed boundary -IB) là một công cụ hữu hiệu cho các bài toán có biên di chuyển hoặc miền tính toán phức tạp. Phương pháp IB giải quyết các bài toán FSI trên cơ sở thay thế ảnh hưởng của vật cản trong dòng lưu chất bằng cách đưa vào một thành phần lực tác động lên dòng chảy thông qua một hàm phân bố dirac delta, khi đó miền tính toán xem như là một miền lưu chất đồng nhất và các chi phí chia lại lưới sau mỗi bước thời gian sẽ được loại bỏ.

Tuy nhiên, các bài toán FSI trong không gian hai chiều hay ba chiều khi được giải bằng IBM dựa trên các phương pháp chia lưới truyền thống (sai phân hữu hạn, phần tử hữu hạn hay thể tích hữu hạn …) thì việc chia lưới trên toàn miền tính toán sẽ đòi hỏi số biến lưới rất lớn. Điều này dẫn đến các vấn đề như mất nhiều thời gian tính toán, sự phức tạp trong các giải thuật chia lưới, cũng như nguồn tài nguyên lưu trữ phải lớn. Phương pháp Proper generalized decompostion (PGD) được đề xuất bởi bởi Ammar cùng cộng sự [25, 26] là một phương pháp hiệu quả và đầy hứa hẹn. Phương pháp PGD tìm kiếm lời giải của bài toán đa chiều bằng cách đưa bài toán đa chiều thành chuỗi các bài toán một chiều để giải quyết.

Bằng cách khai thác những thuận lợi của cả hai phương pháp IB và PGD, mục tiêu của luận án là kết hợp phương pháp IB và phương pháp PGD để giải quyết các bài toán dòng chảy nhớt không nén qua các vật thể biên cứng [27] và biên đàn hồi [28]. Trong sự kết hợp này, các công thức của phương pháp IB được sử dụng để xây dựng sự tương tác giữa lưu chất và kết cấu bằng cách đưa một thành phần lực cưỡng bức vào hệ phương trình Navier-

Stokes. Sau đó, phương pháp PGD được sử dụng để tìm kiếm lời giải của hệ phương trình Navier-Stokes. Bằng cách thực hiện này, các ưu điểm của phương pháp IB và PGD sẽ được khai thác một cách hiệu quả. Các công thức biên nhúng giúp xử lý biên phức tạp của bài toán FSI trong khi phương pháp PGD giúp tăng tốc độ tính toán và làm giảm sự phức tạp của các bài toán đa chiều.

1.2. Tổng quan về phương pháp IB

1.2.1. Phương pháp IB cổ điển

Phương pháp IB cổ điển lần đầu tiên được giới thiệu bởi Peskin [29] để mô phỏng dòng máu qua van tim. Từ phương pháp ban đầu, các biến thể khác nhau của lớp phương pháp này đã được đề xuất để giải quyết bài toán dòng chảy qua vật thể biên cứng.

1.2.2. Phương pháp IB cưỡng bức trực tiếp

Phương pháp IB cưỡng bức trực tiếp được đề xuất bởi Mohd-Yosuf [55] và Fadlun cùng cộng sự [56] cho những bài toán dòng chảy qua vật thể biên cứng thông qua việc hiêu chỉnh phương trình động lượng rời rạc.

Phương pháp IB cưỡng bức trực tiếp đã được phát triển và cải tiến bằng cách kết hợp với phương pháp cổ điển, vận tốc và lực trên lưới nền lưu chất và biên nhúng có thể được chuyển đổi bằng cách sử dụng hàm rời rạc delta.

1.2.3. Phương pháp IB chiếu

Để áp đặt điều kiện biên không trượt một cách chính xác, Taira & Colonius [64] đã đề xuất phương pháp IB chiếu. Bằng cách xét lực biên là một nhân tử Lagrange để thỏa mãn điều kiện biên không trượt trên biên nhúng, phương pháp IB chiếu kết hợp hai nhân tử Lagrange cho áp suất và lực biên thành một phương trình Poisson hiệu chỉnh. Phương pháp này rất chính xác vì nó cưỡng bức điều kiện phân kỳ tự do và điều kiện biên không trượt một cách đồng thời trong bước chiếu.

1.2.4. Phương pháp IB ô ảo

Tseng & Ferziger [67] và Mittal cùng cộng sự [68] đã mở rộng phương pháp của Mohd-Yosuf [55] và Fadlun cùng cộng sự [56] thông qua một phương pháp IB ô ảo. Ô ảo được định nghĩa ở bên trong của biên nhúng để mỗi ô ảo có ít nhất một điểm lân cận trong miền lưu chất. Biến dòng chảy cục bộ sau đó được biểu diễn thông qua một đa thức (tuyến tính hoặc bậc hai) và giá trị ô ảo có trọng số được tính bởi giá trị các điểm lưới lân cận.

1.2.5. Phương pháp IB cắt ô

Trong phương pháp IB cắt ô, các ô lưu chất bị cắt bởi biên nhúng được xác định và đường cắt của biên với những ô này được tính toán. Kế đến, các ô cắt có tâm nằm bên trong lưu chất được tái tạo lại hình dáng thành những ô khác. Phương pháp này giữ lại được độ chính xác không gian bậc hai và dẫn đến một mặt phân cách rõ nét.

1.2.6. Phương pháp mặt phân cách nhúng

Phương pháp mặt phân cách nhúng lần đầu tiên được giới thiệu bởi LeVeque & Li [77] để cải thiện độ chính xác của phương pháp IB cổ điển ở gần biên nhúng. Sau đó, nó được mở rộng cho hệ phương trình Stokes [78] và hệ phương trình Navier-Stokes [79, 80]. Phương pháp mặt phân cách nhúng có ý tưởng tương tự như phương pháp IB cổ điển, trong đó ảnh hưởng của mặt phân cách nhúng lên lưu chất xung quanh được trình bày bởi lực tại các điểm trên biên nhúng. Thay vì phân bố lực tại các điểm trên biên đến các nút lưới nền lưu chất như trong phương pháp IB cổ điển, phương pháp mặt phân cách nhúng đưa các điều kiện nhảy vào sơ đồ sai phân hữu hạn để tính ảnh hưởng của lực tại các điểm trên biên nhúng lên lưu chất.

1.2.7. Phương pháp IB trên các biến không cơ bản

Phương pháp IB cũng đã tích hợp thành công trong các công thức biến không cơ bản của dòng chảy. Ren cùng cộng sự [86] đã trình bày phương pháp IB trong công thức hàm dòng-xoáy. Trong phương pháp này, điều kiện biên yêu cầu đạt được bằng cách hiệu chỉnh vận tốc và xoáy.

1.3. Tổng quan về phương pháp PGD

Phương pháp PGD có thể xây dựng dạng tách biến của lời giải mà không cần biết trước về dữ liệu trước khi tính toán. Vì vậy chi phí tính toán và sự phức tạp của lời giải PGD cho các bài toán đa chiều được giảm một cách đáng kể. Gần đây, phương pháp PGD đã được áp dụng để giải quyết các bài toán kỹ thuật như vật liệu composite [104-108] , tối ưu hóa kết cấu [109], lưu chất [110, 111], hóa lượng tử [112] truyền nhiệt [113, 114], phân tích độ mỏi vật liệu [115], mô phỏng robot [116], năng lượng hạt nhân [117]. Tổng quan về phương pháp PGD có thể tìm thấy trong [118, 119]. Trong nhóm các bài toán về tương tác rắn-lỏng, phương pháp PGD cũng đã được áp dụng trong một vài nghiên cứu gần đây như trong công bố của Dumon cùng cộng sự [120] đã sử dụng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp thể tích hữu hạn để giải hệ phương trình Navier-Stokes cho cả bài toán dòng chảy ổn định và bất ổn định với các hệ số Reynolds khác nhau, Dumon cùng cộng sự [121] cũng đã kết hợp phương pháp PGD với phương pháp phổ để giải bài toán dòng chảy trên một miền vuông. Tuy nhiên, những công trình nghiên cứu về phương pháp PGD cho các bài toán FSI vẫn còn hạn chế và chủ yếu cho các bài toán có miền tính toán đơn giản, thường là miền tính toán hình chữ nhật và không có vật cản. Khi có vât cản đưa vào bài toán thì sự tương tác giữa lưu chất và kết cấu sẽ trở nên rất phức tạp do lưu chất không chỉ tương tác với biên pháp tuyến mà còn tương tác với vật cản bất kỳ. Phương pháp PGD sẽ giải rất nhanh các bài toán, nhưng để giải quyết hiệu quả các bài toán FSI với miền tính toán phức tạp thì việc xử lý các vấn đề về miền tính toán cần được thực hiện trước khi sử dụng phương pháp PGD để giải phương trình chuyển động của lưu chất.

1.4. Mục tiêu nghiên cứu của luận án.

Nghiên cứu phương pháp số mô phỏng các bài toán dòng chảy nhớt không nén (trong trường hợp dòng chảy tầng ở hệ số Reynolds thấp) qua các vật cản biên cứng và biên đàn hồi được cụ thể hóa một số vấn đề như sau:

- Ứng dụng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn trong việc giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng bậc cao.
- Ứng dụng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn để giải quyết các bài toán dòng chảy nhớt không nén với các điều kiện biên khác nhau.
- Phát triển phương pháp IB kết hợp phương pháp PGD giải quyết các bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên cứng đứng yên và vật cản biên cứng di chuyển.
- Phát triển phương pháp IB kết hợp phương pháp PGD giải quyết các bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật thể biên đàn hồi.

1.5. Phạm vi nghiên cứu

- Luận án tập trung nghiên cứu giải thuật kết hợp phương pháp IB và phương pháp PGD cho các bài toán trong không gian hai chiều.
- Các bài toán tương tác rắn lỏng được khảo sát trong luận án là các bài toán dòng chảy nhớt không nén được với điều kiện là dòng chảy tầng (ở hệ số Reynolds thấp).

1.6. Phương pháp nghiên cứu

- Nghiên cứu tài liệu, các công bố khoa học về phương pháp IB và phương pháp PGD.
- Mô hình hóa các bài toán về tương tác rắn lỏng.
- Xây dựng chương trình mô phỏng sử dụng ngôn ngữ lập trình Matlab để khảo sát các bài toán.

1.7. Tính mới của luận án

- Phát triển phương pháp PGD với phương pháp sai phân hữu hạn để giải quyết các bài toán phương trình vi phân đạo hàm riêng bậc cao (phương trình Biharmonic, phương trình Poisson) trong không gian hai chiều và ba chiều.

- Ứng dụng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn giải bài toán dòng chảy nhớt không nén với các điều kiện biên khác nhau.
- Phát triển phương pháp IB kết hợp với phương pháp PGD mô phỏng bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật thể biên cứng đứng yên và di chuyển.
- Phát triển phương pháp IB kết hợp với phương pháp tách biến PGD mô phỏng bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật thể biên đàn hồi.

Chương 2
PHƯƠNG PHÁP PROPER GENERALIZED DECOMPOSITION CHO BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠO HÀM RIÊNG

2.1. Giới thiệu

Phương pháp PGD là phương pháp giảm bậc mô hình dựa trên cơ sở tách biến, lời giải $u\left(x_1, x_2, ..., x_N\right)$ của bài toán được tìm ở dạng sau

$$u\left(x_1, x_2, ..., x_N\right) \approx \sum_{i=1}^{Q} \prod_{k=1}^{n} F_{ki}\left(x_k\right) = \sum_{i=1}^{Q} F_{1i}\left(x_1\right) F_{2i}\left(x_2\right) \cdots F_{Ni}\left(x_N\right) \qquad (2.2)$$

ở đây x_i có thể là biến vô hướng hoặc vector liên quan đến không gian, thời gian hoặc thông số bất kỳ khác của bài toán.

2.2. Phương pháp PGD cho phương trình vi phân đạo hàm riêng

2.2.1. Cơ sở lý thuyết của phương pháp PGD

Xét bài toán như sau

$$L(U) = g \text{ trong miền } \Omega = \Omega_x \times \Omega_y \qquad (2.3)$$

Lời giải xấp xỉ của phương trình giả sử được trình bày ở dạng tách biến như sau

$$U(x, y) \approx \sum_{i=1}^{n} F^i(x) \cdot G^i(y) \qquad (2.4)$$

Quá trình giải phương trình (2.3) bằng phương pháp PGD là một quá trình lặp. Lời giải ở bước thời gian thứ n là tổng các tích của các hàm trên mỗi biến không gian

$$U\left(x, y\right) \approx \sum_{i=1}^{n-1} F^i(x) \cdot G^i(y) + F^n(x) \cdot G^n(y) \qquad (2.5)$$

Thay phương trình (2.5) vào phương trình (2.3) ta được

$$L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x) \cdot G^i(y) + F^n(x) \cdot G^n(y)\right) = g + re^n \qquad (2.6)$$

ở đây re^n là sai số thặng dư của lời giải xấp xỉ. Để xác định F^n và G^n, phương trình (2.6) lần lượt được chiếu lên chiều của F^n và G^n:

$$\left\langle L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x)\cdot G^i(y)+F^n(x)\cdot G^n(y)\right),F^n\right\rangle_{L^2(X)}=\left\langle g,F^n\right\rangle_{L^2(X)}+\left\langle re^n,F^n\right\rangle_{L^2(X)} \tag{2.7}$$

và

$$\left\langle L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x)\cdot G^i(y)+F^n(x)\cdot G^n(y)\right),G^n\right\rangle_{L^2(Y)}=\left\langle g,G^n\right\rangle_{L^2(Y)}+\left\langle re^n,G^n\right\rangle_{L^2(Y)} \tag{2.8}$$

ở đây $\langle .,.\rangle_{L^2(X)}$ và $\langle .,.\rangle_{L^2(Y)}$) là tích vô hướng trên L^2 trong chiều trục x và trục y tương ứng. Với phương pháp này, sai số dư phải trực giao với các hàm F^n và G^n, vì vậy

$$\left\langle L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x)\cdot G^i(y)+F^n(x)\cdot G^n(y)\right),F^n\right\rangle_{L^2(X)}=\left\langle g,F^n\right\rangle_{L^2(X)} \tag{2.9}$$

và

$$\left\langle L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x)\cdot G^i(y)+F^n(x)\cdot G^n(y)\right),G^n\right\rangle_{L^2(Y)}=\left\langle g,G^n\right\rangle_{L^2(Y)} \tag{2.10}$$

Để đạt được các hàm F^n và G^n, các phương trình (2.9) và (2.10) phải được giải đồng thời bằng cách áp dụng giải thuật lặp luân phiên cho đến khi lời giải của bài toán hội tụ.

2.2.2. Phương pháp PGD cho phương trình vi phân đạo hàm riêng bậc cao

2.2.2.1. Phương trình Poisson

Xét phương trình Poisson trong không gian 3D như sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f\left(x,y,z\right) \tag{2.11}$$

Giải thuật PGD được áp dụng để giải phương trình 3D Poisson bằng cách giải ba phương trình vi phân 1D theo các bước sau:

Bước 1: Tìm hàm $R(x)$

Giả sử $S(y)$ và $T(z)$ đã biết, khi đó $S^*(y)=0$ và $T^*(z)=0$, giải phương trình sau

$$\begin{aligned}(a_y a_z)\frac{d^2R}{dx^2}+(b_y a_z + a_y b_z)R = af_x - \sum_{i=1}^{n}\frac{d^2X_i}{dx^2}(a_{y_i}a_{z_i}) \\ -\sum_{i=1}^{n}X_i(b_{y_i}a_{z_i}) - \sum_{i=1}^{n}X_i(a_{y_i}b_{z_i})\end{aligned} \tag{2.20}$$

Bước 2: Tìm hàm $S(y)$

Từ hàm $R(x)$ vừa tìm được ở bước 1 và giả sử hàm $T(z)$ đã biết, khi đó $R^*(x)=0$ và $T^*(z)=0$, giải phương trình sau

$$\begin{aligned}(a_x a_z)\frac{d^2S}{dy^2}+(b_x a_z + a_x b_z)S = a_{fy} - \sum_{i=1}^{n}\frac{d^2Y_i}{dy^2}(a_{x_i}a_{z_i}) \\ -\sum_{i=1}^{n}Y_i(b_{x_i}a_{z_i}) - \sum_{i=1}^{n}Y_i(a_{x_i}b_{z_i})\end{aligned} \tag{2.23}$$

Bước 3: tìm hàm $T(z)$

Từ hàm $R(x)$ và $S(y)$ đã tính ở bước 1 và bước 2, khi đó $R^*=0$ và $S^*=0$, giải phương trình sau để tìm $T(z)$

$$\begin{aligned}(a_x a_y)\frac{d^2T}{dz^2}+(b_x a_y + a_x b_y)T = a_{fz} - \sum_{i=1}^{n}\frac{d^2T_i}{dz^2}(a_{x_i}a_{y_i}) \\ -\sum_{i=1}^{n}T_i(b_{x_i}a_{y_i}) - \sum_{i=1}^{n}T_i(a_{x_i}b_{y_i})\end{aligned} \tag{2.26}$$

Các bước giải để tìm $R(x)$, $S(y)$ và $T(z)$ được lặp cho đến khi kết quả hội tụ.

Điều kiện dừng toàn cục của bài toán được tính như sau

$$E = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - f\left(x, y, z\right) \right\|_2 < \varepsilon_u \qquad (2.29)$$

ở đây ε_u là một hằng số được chọn đủ nhỏ. Chúng ta cũng có thể sử dụng điều kiện dừng toàn cục bằng cách sử dụng công thức sau

$$E = \frac{\left\| X_n\left(x\right) \cdot Y_n\left(y\right) \right\|_2}{\left\| \sum_{i=1}^{n} X_i\left(x\right) \cdot Y_i\left(y\right) \right\|_2} < \varepsilon_u \qquad (2.30)$$

2.2.2.2. Phương trình Biharmonic

Xét phương trình Biharmonic trong không gian ba chiều như sau

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial x^2} = f\left(x, y, z\right) \qquad (2.31)$$

Giải thuật PGD được áp dụng để giải phương trình 3D Biharmonic bằng cách giải ba phương trình vi phân 1D theo các bước sau:

Bước 1: **Tìm** $R\left(x\right)$

$$\begin{aligned}
&\left(a_y a_z\right)\frac{d^4 R}{dx^4} + \left(2b_y a_z + 2a_y b_z\right)\frac{d^2 R}{dx^2} + \left(c_y a_z + a_y c_z + 2b_y b_z\right)R \\
&= af_x - \sum_{i=1}^{n} \frac{d^4 X_i}{dx^4}\left(a_{y_i} a_{z_i}\right) - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2 X_i}{dx^2}\left(b_{y_i} a_{z_i} + a_{y_i} b_{z_i}\right) \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{n} X_i\left(c_{y_i} a_{z_i} + a_{y_i} c_{z_i} + 2b_{y_i} b_{z_i}\right)
\end{aligned} \qquad (2.36)$$

.***Bước 2:*** **tìm hàm** $S\left(x\right)$

$$\begin{aligned}
&\left(a_x a_z\right)\frac{d^4 S}{dy^4} + \left(2b_x a_z + 2a_x b_z\right)\frac{d^2 S}{dy^2} + \left(c_x a_z + a_x c_z + 2b_x b_z\right)S \\
&= af_y - \sum_{i=1}^{n} \frac{d^4 Y_i}{dy^4}\left(a_{x_i} a_{z_i}\right) - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2 Y_i}{dy^2}\left(b_{x_i} a_{z_i} + a_{x_i} b_{z_i}\right) \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{n} Y_i\left(c_{x_i} a_{z_i} + a_{x_i} c_{z_i} + 2b_{x_i} b_{z_i}\right)
\end{aligned} \qquad (2.37)$$

Bước 3: **tìm hàm** $T(z)$

$$\left(a_x a_y\right)\frac{d^4T}{dz^4}+\left(2b_x a_y+2a_x b_y\right)\frac{d^2T}{dz^2}+\left(c_x a_y+a_x c_y+2b_x b_y\right)T$$
$$=af_z-\sum_{i=1}^{n}\frac{d^4Z_i}{dz^4}\left(a_{x_i}a_{y_i}\right)-2\sum_{i=1}^{n}\frac{d^2T_i}{dz^2}\left(b_{x_i}a_{y_i}+a_{x_i}b_{y_i}\right)$$
$$-\sum_{i=1}^{n}T_i\left(c_{x_i}a_{y_i}+a_{x_i}c_{y_i}+2b_{x_i}b_{y_i}\right) \quad (2.38)$$

Các bước giải để tìm $R(x)$, $S(y)$ và $T(z)$ được lặp cho đến khi kết quả hội tụ.

Điều kiện dừng toàn cục của bài toán được tính như sau

$$E=\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial z^2}+2\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\partial x^2}-f(x,y,z)\right\|_2<\varepsilon_u$$

(2.41)

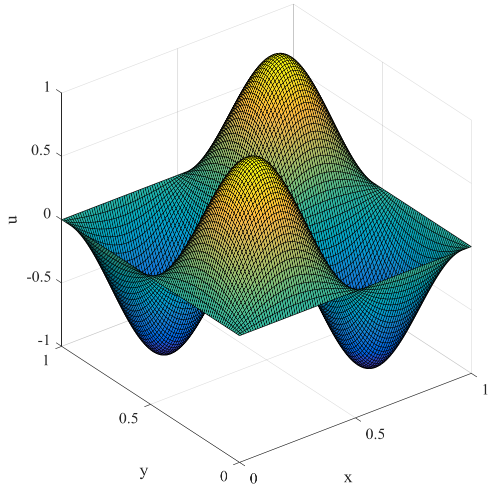
ở đây ε_u là một hằng số được chọn đủ nhỏ. Chúng ta cũng có thể sử dụng điều kiện dừng toàn cục bằng cách sử dụng công thức sau

$$E=\frac{\left\|X_n(x)\cdot Y_n(y)\right\|_2}{\left\|\sum_{i=1}^{n}X_i(x)\cdot Y_i(y)\right\|_2}<\varepsilon_u \quad (2.42)$$

2.3.4. Ví dụ minh họa

Bài toán 1: Xét phương trình Poisson trong miền chữ nhật hai chiều như sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-8\pi^2\sin(2\pi x)\cos(2\pi y) \quad (2.50)$$



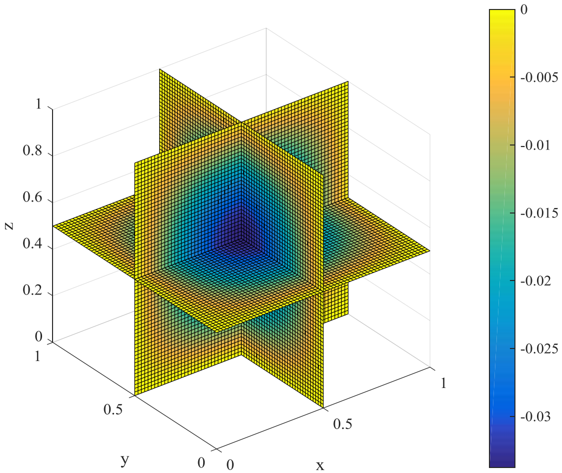
Hình 2.1: Lời giải PGD của phương trình (2.50) ở bước lưới 100 trên mỗi chiều.

Bảng 2.1: Sai số và thời gian tính toán của lời giải PGD cho phương trình (2.50)

Số điểm lưới trên mỗi chiều	Thời gian tính toán (s)	$\max\left(\lvert u_{\text{ex}} - u\rvert\right)$	$\sqrt{\frac{1}{n_x \times n_y}\sum_{i,j}\left(\left(u_{\text{ex}}\right)_{i,j} - u_{i,j}\right)^2}$
$n = 20$	0.0774	0.0011	0.0021
$n = 40$	0.0812	1.33×10^{-5}	2.20×10^{-5}
$n = 60$	0.0847	1.22×10^{-6}	2.01×10^{-6}
$n = 80$	0.0873	2.82×10^{-7}	5.08×10^{-7}
$n = 100$	0.0886	1.01×10^{-7}	1.91×10^{-7}

Bài toán 2: Xét phương trình Poisson trong không gian ba chiều như sau:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z) \qquad (2.52)$$



Hình 2.2: Lời giải PGD của phương trình (2.52) ở bước lưới 64 trên mỗi chiều.

Bảng 2.2: Thời gian tính toán và sai số của lời giải PGD cho phương trình (2.52)

Số điểm lưới trên mỗi chiều	Tác giả	Thời gian tính toán (s)	$\max\left(\lvert u_{ex} - u\rvert\right)$
$n = 16$	Ghasemi [122]	8.47	2.69×10^{-6}
	Shi và cộng sự [123]	0.36	1.34×10^{-4}
	Luận án	0.090	3.23×10^{-6}
$n = 32$	Ghasemi [122]	127	6.73×10^{-7}
	Shi và cộng sự [123]	3.68	3.55×10^{-5}
	Luận án	0.092	5.58×10^{-8}
$n = 64$	Luận án	0.095	2.334×10^{-9}

Bài toán 3:

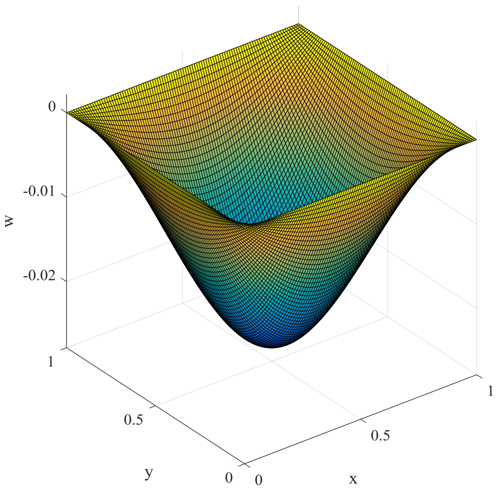
Xét tấm hình chữ nhật $\{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ có phương trình vi phân chủ đạo như sau

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y) \tag{2.54}$$

Vế phải được cho như sau

$$f(x, y) = \frac{q}{D}\sin(\pi x)\sin(\pi y). \tag{2.55}$$

Trong trường hợp tấm có điều kiện biên là gối tựa đơn ở cả bốn cạnh.



Hình 2.4: Lời giải PGD cho tấm mỏng với điều kiện biên gối tựa đơn ở bốn cạnh của tấm trên lưới 100 cho mỗi chiều.

Bảng 2.3: Thời gian tính toán và sai số của lời giải PGD cho bài toán bài toán tấm mỏng chịu uốn với điều kiện biên gối tựa đơn ở bốn cạnh của tấm

Số điểm lưới trên mỗi chiều	Thời gian tính toán (s)	$\sqrt{\frac{1}{n_x \times n_y}\sum_{i,j}\left((u_{ex})_{i,j} - u_{i,j}\right)^2}$	$\max(\lvert u_{ex} - u\rvert)$
$n = 20$	0.379	1.22×10^{-5}	2.18×10^{-5}
$n = 40$	0.412	1.39×10^{-7}	2.51×10^{-7}
$n = 60$	0.416	2.76×10^{-8}	5.31×10^{-8}
$n = 80$	0.483	4.43×10^{-9}	1.02×10^{-8}
$n = 100$	0.545	3.25×10^{-9}	6.47×10^{-9}

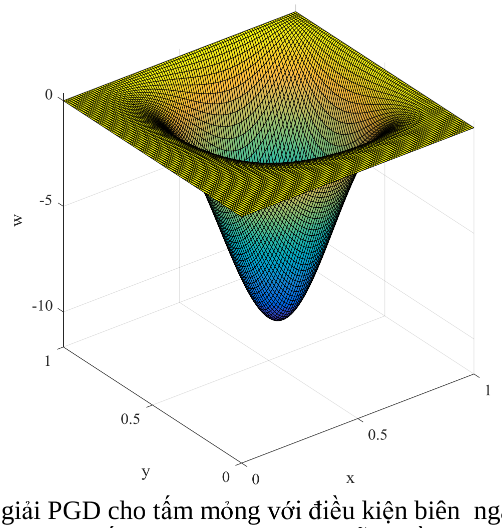
Bài toán 4:

Xét tấm hình chữ nhật $\{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ có phương trình vi phân chủ đạo như sau

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x,y) \tag{2.59}$$

Trong trường hợp tấm bị ngàm ở cả bốn cạnh và hàm $f(x,y)$ được cho như sau

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & \frac{q}{D}56400\left(a^2 - 10ax + 15x^2\right)(b-y)^2 y^4 \\ & + \frac{q}{D}18800x^2\left(6a^2 - 20ax + 15x^2\right)y^2\left(6b^2 - 20by + 15y^2\right), \\ & + \frac{q}{D}56400(a-x)^2 x^4\left(b^2 - 10by + 15y^2\right) \end{aligned} \tag{2.62}$$



Hình 2.5: Lời giải PGD cho tấm mỏng với điều kiện biên ngàm ở bốn cạnh của tấm trên lưới 100 cho mỗi chiều.

Bảng 2.4: Thời gian tính toán và sai số của lời giải PGD cho bài toán tấm mỏng với điều kiện biên ngàm ở bốn cạnh của tấm.

Số điểm lưới trên mỗi chiều	Thời gian tính toán (s)	$\sqrt{\frac{1}{n_x \times n_y}\sum_{i,j}\left(\left(u_{ex}\right)_{i,j}-u_{i,j}\right)^2}$	$\max\left(\lvert u_{ex}-u\rvert\right)$
$n=20$	0.184	0.01683	0.03434
$n=40$	0.216	0.00114	0.00232
$n=60$	0.220	2.32×10^{-4}	4.69×10^{-4}
$n=80$	0.304	7.48×10^{-5}	1.50×10^{-4}
$n=100$	0.404	3.15×10^{-5}	6.25×10^{-5}

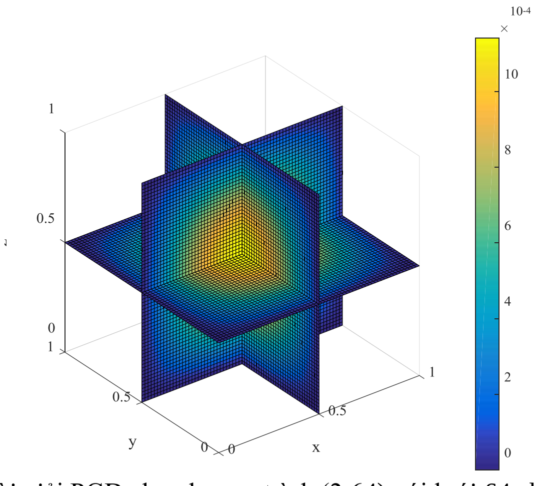
Bài toán 5:

Xét bài toán 3D Biharmonic như sau

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}+2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial z^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\partial x^2}\right)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z) \tag{2.64}$$

với điều kiện biên được chọn như sau

$$u=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{2.65}$$



Hình 2.6: Lời giải PGD cho phương trình (2.64) với lưới 64 cho mỗi chiều.

Bảng 2.5: Thời gian tính toán và sai số của lời giải PGD cho phương trình (2.64)

Số điểm lưới trên mỗi chiều	Tác giả	Thời gian tính toán (s)	Sai số cực đại
$n = 16$	Ghasemi [122]	94.1	1.30×10^{-5}
	Shi và cộng sự [123]	2.625	1.62×10^{-6}
	Luận án	0.143	2.38×10^{-6}
$n = 32$	Ghasemi [122]	-	6.37×10^{-6}
	Shi và cộng sự	39.262	4.07×10^{-7}
	Luận án	0.147	2.81×10^{-8}
$n = 64$	Luận án	0.156	1.44×10^{-9}

Chương 3
PHƯƠNG PHÁP PROPER GENERALIZED DECOMPOSTION CHO BÀI TOÁN DÒNG CHẢY NHỚT KHÔNG NÉN

3.1. Giới thiệu

Trong chương này, chúng ta sẽ áp dụng phương pháp PGD để giải phương trình Navier – Stokes cho bài toán dòng chảy nhớt không nén trong không gian hai chiều. Trong phương trình chuyển động của dòng chảy nhớt không nén, sự kết hợp giữa vận tốc và áp suất được trình bày bằng phương pháp chiếu. Sau đó, phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn được áp dụng để giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng để tìm vận tốc và áp suất của dòng chảy.

3.2. Hệ phương trình Navier – Stokes cho bài toán dòng chảy nhớt không nén

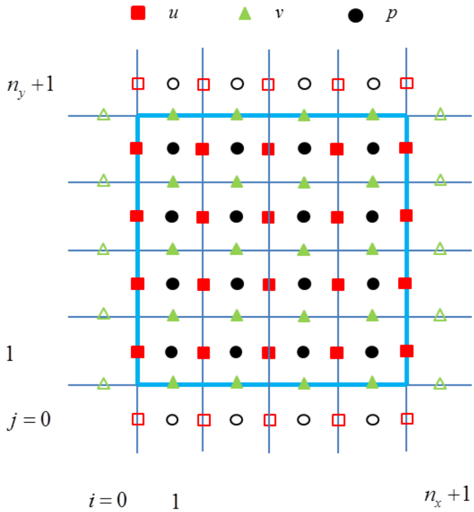
$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = -\rho\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} \tag{3.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{3.2}$$

ở đây $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \left(u(\mathbf{x},t), v(\mathbf{x},t)\right)$ là vận tốc của lưu chất và $p(\mathbf{x},t)$ là áp suất lưu chất. Các hệ số ρ và μ lần lượt là khối lượng riêng và độ nhớt của lưu chất.

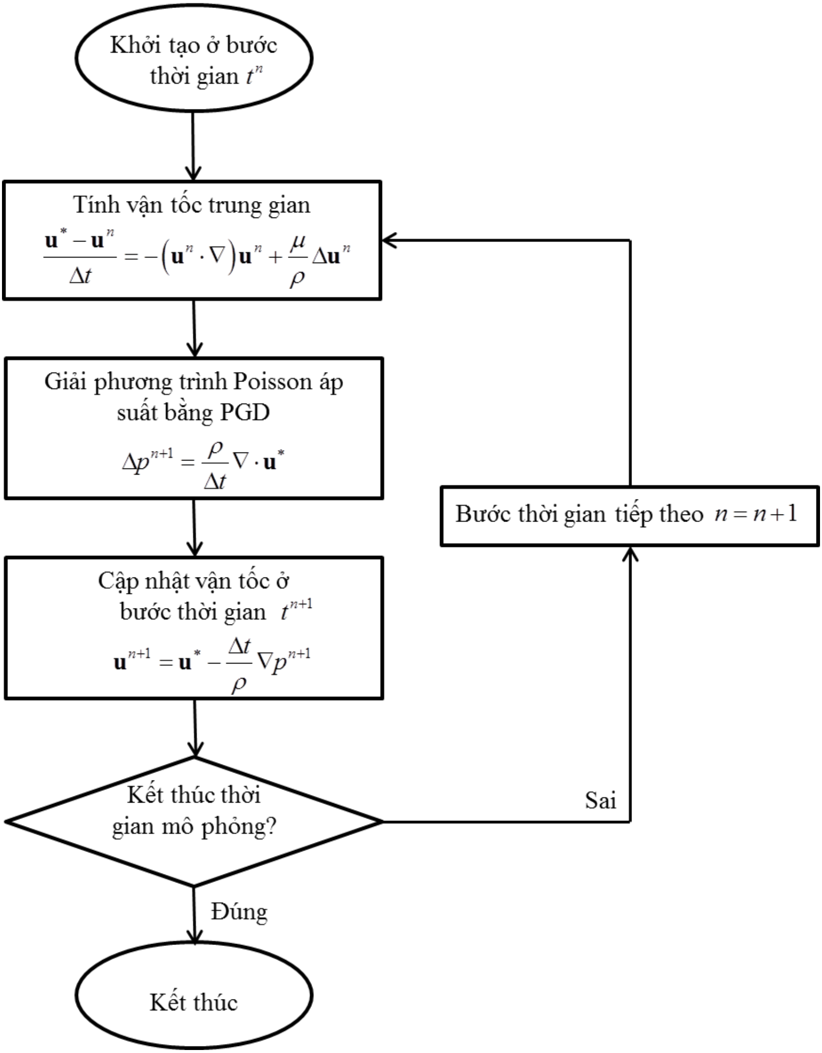
3.3. Rời rạc không gian

Khi giải hệ phương trình Navier – Stokes, rời rạc không gian được thực hiện trên lưới so le như hình 3.1. Với lưới so le, áp suất p nằm chính giữa của ô lưới, còn vận tốc u đượt đặt ở vị trí trung điểm đường phân cách ô theo phương thẳng đứng, và vận tốc v được đặt ở vị trí trung điểm đường phân cách ô theo phương ngang.



Hình 3.1: Lưới so le.

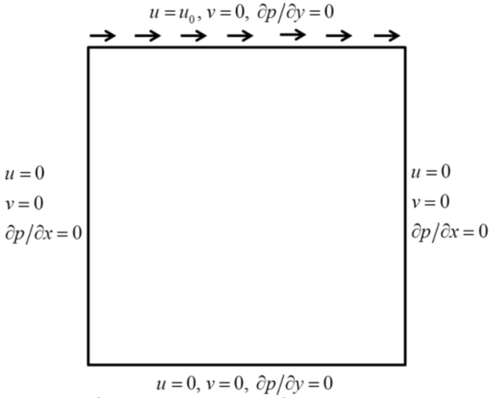
3.4. Giải thuật tổng quát



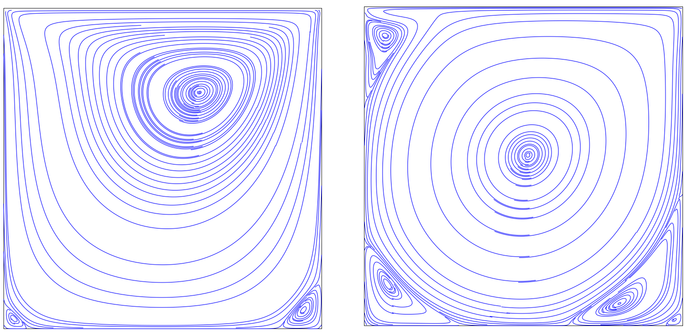
Hình 3.3: Sơ đồ giải thuật phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén.

3.6. Kết quả mô phỏng số

3.6.1. Bài toán Lid-driven cavity flow



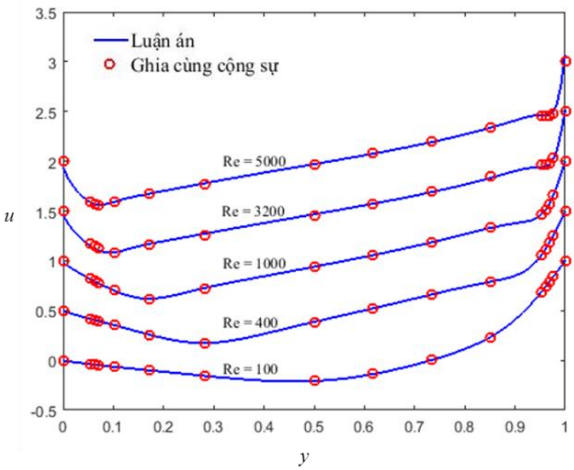
Hình 3.4: Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán Lid-driven cavity flow.



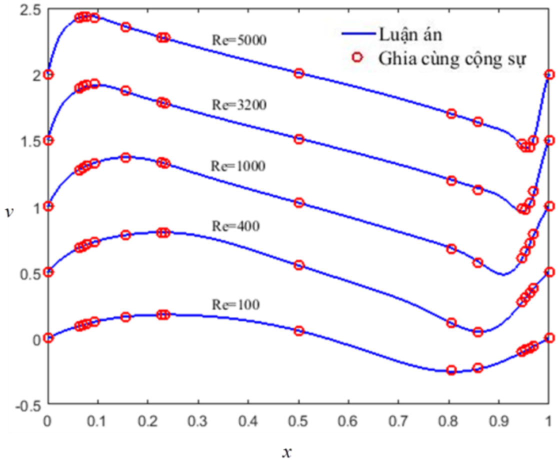
Hình 3.9: Kết quả đường dòng của bài toán Lid-driven cavity flow ở hệ số $\mathrm{Re} = 100$ và $\mathrm{Re} = 5000$.

Bảng 3.1: Tọa độ tâm xoáy trung tâm của bài toán Lid-driven cavity flow ở các hệ số Reynolds khác nhau.

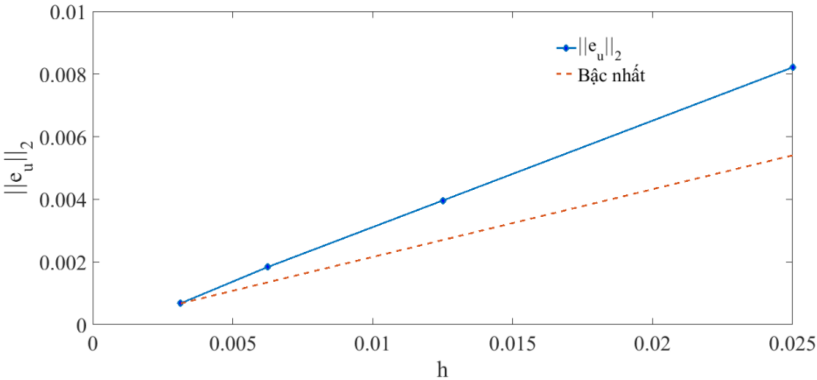
		$\mathrm{Re}=100$	$\mathrm{Re}=400$	$\mathrm{Re}=1000$	$\mathrm{Re}=3200$	$\mathrm{Re}=5000$
x_c	Ghia at.al [125]	0.617	0.555	0.531	0.517	0.512
	Bruneau at.al [126]	-	-	0.469	-	0.484
	Luận án	0.616	0.5558	0.532	0.518	0.514
y_c	Ghia at.al [125]	0.734	0.606	0.563	0.547	0.535
	Bruneau at.al [126]	-	-	0.563	-	0.539
	Luận án	0.738	0.605	0.566	0.540	0.534



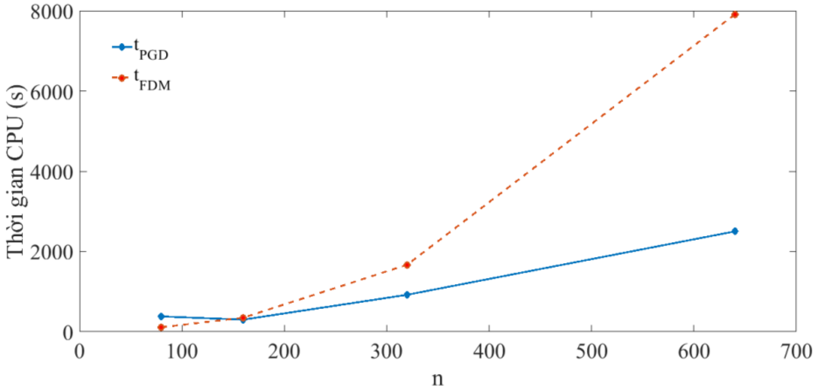
Hình 3.10: So sánh vận tốc theo chiều trục *x* tại vị trí $x=0.5$ với kết quả của Ghia [125] ở các hệ số $Re=100$, $Re=400$, $Re=1000$, $Re=3200$ và $Re=5000$.



Hình 3.11: So sánh vận tốc theo chiều trục y tại vị trí $y = 0.5$ với kết quả của Ghia [125] ở các hệ số $Re = 100$, $Re = 400$, $Re = 1000$, $Re = 3200$ và $Re = 5000$.



Hình 3.12: Sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang ở các bước lưới khác nhau cho bài toán Lid-driven cavity.

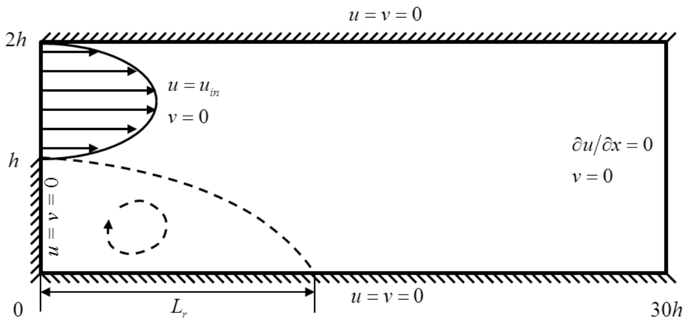


Hình 3.13: Thời gian tính toán của bài toán Lid-driven cavity ở hệ số $\mathrm{Re} = 100$.

3.2.2. Bài toán Backward-facing step flow

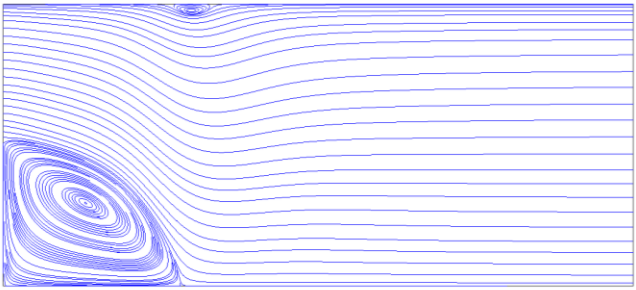
Trường vận tốc vào được mô tả là một dòng chảy song song với thành phần vận tốc theo phương ngang được định nghĩa nhưu sau

$u(y) = 24y(0.5 - y)$ với $0 \le y \le 0.5$

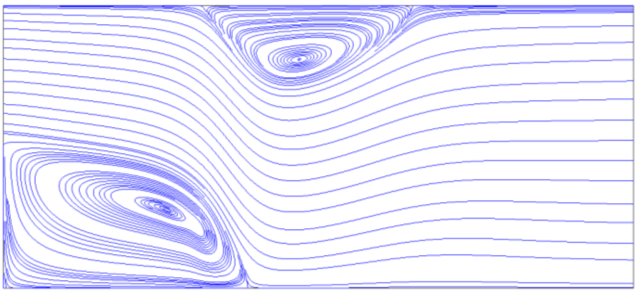


Hình 3.14: Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán Backward-facing step flow.

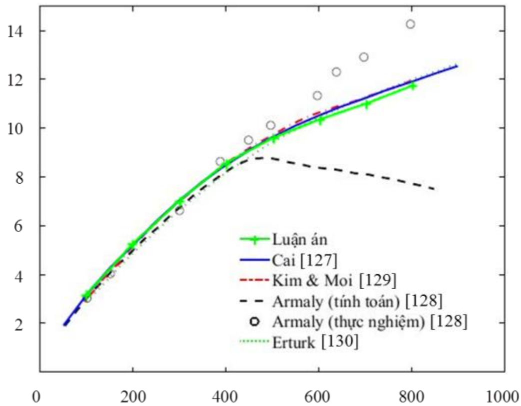
Hình 3.15: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 100$.



Hình 3.18: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 400$.



Hình 3.22: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 800$.



Hình 3.23: So sánh chiều dài vùng xoáy của bài toán Backward-facing step flow.

Chương 4
PHƯƠNG PHÁP BIÊN NHÚNG KẾT HỢP PHƯƠNG PHÁP PGD CHO BÀI TOÁN DÒNG CHẢY NHỚT KHÔNG NÉN QUA VẬT THỂ BIÊN CỨNG

4.1. Giới thiệu

Trong chương này, đề xuất việc kết hợp IBM với phương pháp PGD trong việc giải quyết các bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén qua các vật thể biên cứng.

4.2. Hệ Phương trình chuyển động

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\rho\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}+\nabla p=\mu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{f} \tag{4.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{4.2}$$

Thành phần lực khối tác dụng lên lưu chất là

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x},t\right)=\int_{\Gamma}\mathbf{F}\left(s,t\right)\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{X}\left(s,t\right)\right)ds \tag{4.3}$$

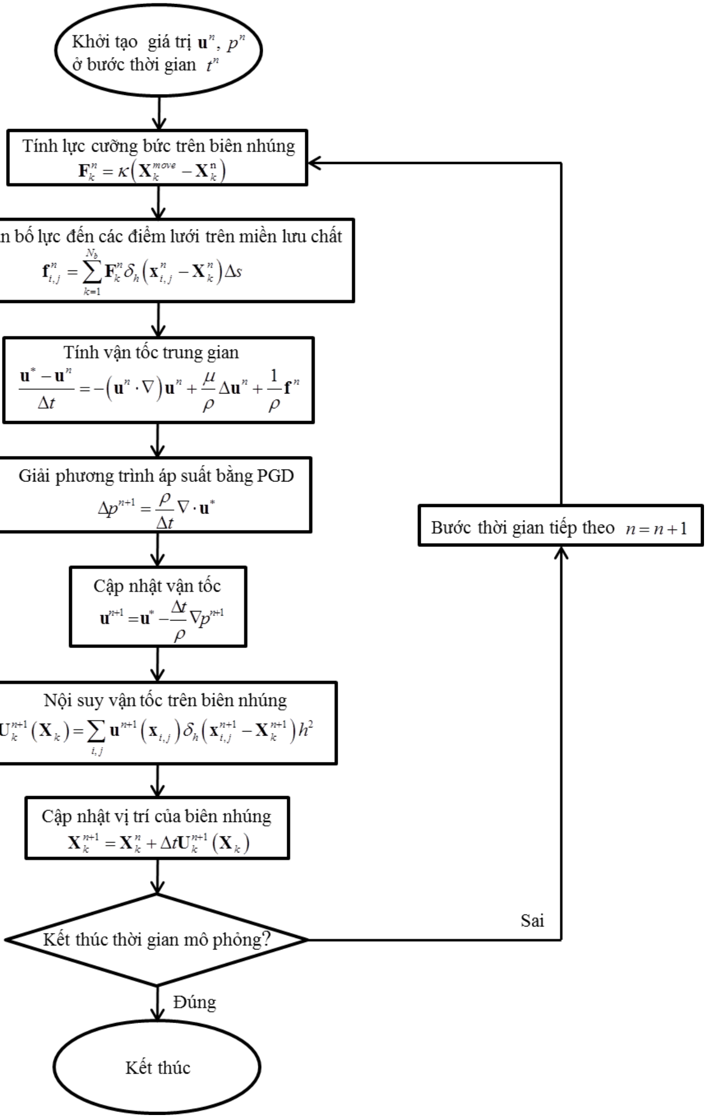
Lực khối tại các điểm biên

$$\mathbf{F}\left(s,t\right)=\kappa\left(\mathbf{X}^{e}\left(s\right)-\mathbf{X}\left(s,t\right)\right) \tag{4.4}$$

Vị trí các điểm trên biên nhúng

$$\frac{\partial\mathbf{X}\left(s,t\right)}{\partial t}=\mathbf{U}\left(s,t\right)=\mathbf{u}\left(\mathbf{X}\left(s,t\right),t\right)=\int_{\Omega}\mathbf{u}\left(\mathbf{x},t\right)\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{X}\left(s,t\right)\right)d\mathbf{x} \tag{4.5}$$

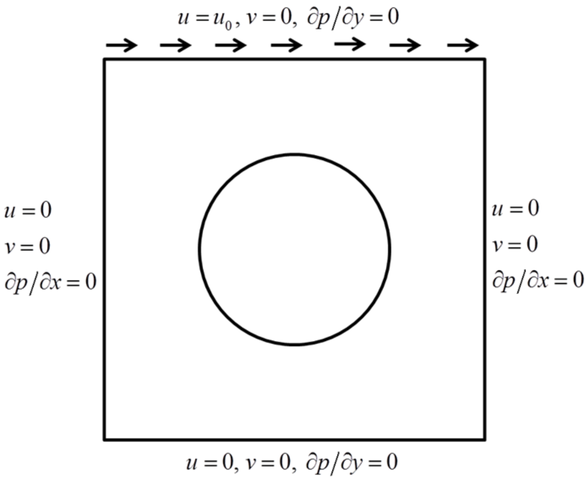
4.3. Giải thuật tổng quát



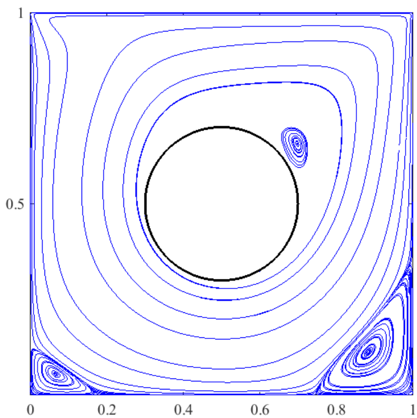
Hình 4.4: Sơ đồ giải thật kết hợp phương pháp IB với phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên cứng.

4.4. Kết quả mô phỏng số

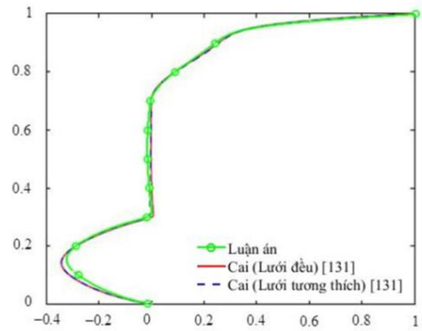
4.4.1. Bài toán dòng chảy qua một miền vuông có vật cản là một trụ tròn



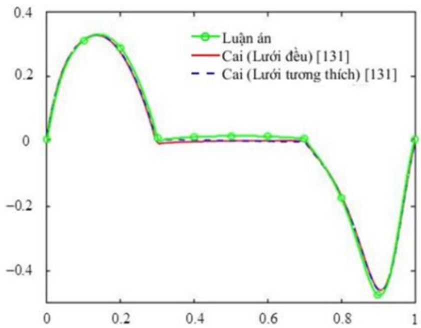
Hình 4.5: Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán dòng chảy qua một miền vuông có vật cản là một trụ tròn.



Hình 4.6: Đường dòng của bài toán dòng chảy qua một miền vuông có vật cản là một trụ tròn.

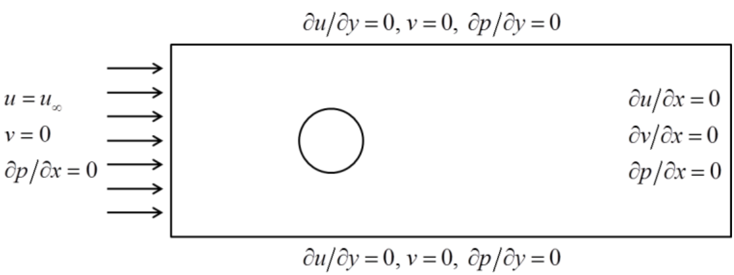


Hình 4.7: Thành phần vận tốc theo phương ngang u ở vị trí $x = 0.5$ của bài toán dòng chảy qua một miền vuông có vật cản là một trụ tròn.

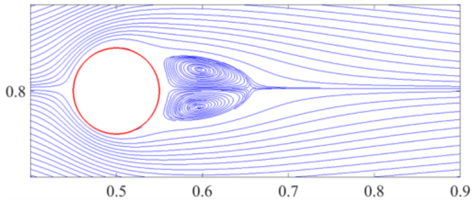


Hình 4.8: Thành phần vận tốc theo phương đứng v ở vị trí $y = 0.5$ của bài toán dòng chảy qua một miền vuông có vật cản là một trụ tròn.

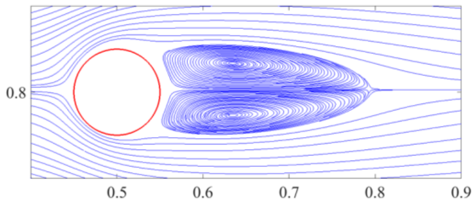
4.4.2. Bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định



Hình 4.10: Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định.



(a) Re = 20



(a) Re = 40

Hình 4.11: Đường dòng của bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định ở hệ số $Re = 20$ và $Re = 40$

Bảng 4.1: Chiều dài vùng xoáy và hệ số cản của bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định ở hệ số $Re = 20$ và $Re = 40$.

	$\mathrm{Re} = 20$		$\mathrm{Re} = 40$	
	L_w/D	C_d	L_w/D	C_d
Tritton [132]	-	2.22	-	1.48
Coutanceau và cộng sự [133]	0.73	-	1.89	-
Calhoun và cộng sự [134]	0.91	2.19	2.18	1.62
Lima và cộng sự [135]	1.04	2.04	2.55	1.54
Rusell và cộng sự [136]	0.94	2.13	2.29	1.60
Le và cộng sự [84]	0.93	2.05	2.22	1.56
Le và cộng sự [137]	1.05	2.07	2.59	1.58
Kang và cộng sự [138]	0.91	2.09	2.25	1.57
Luận án	1.05	2.27	2.42	1.69

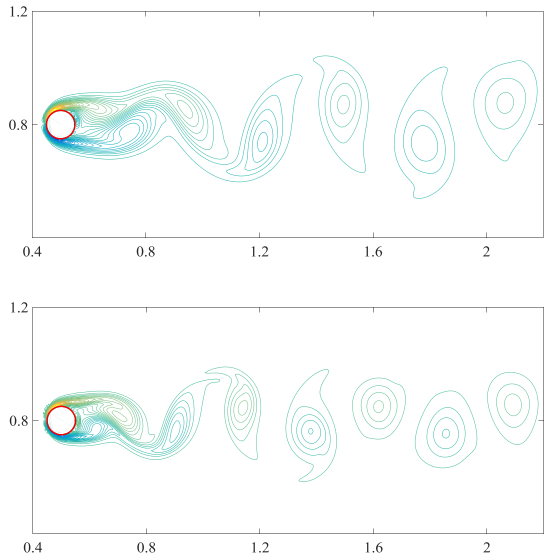
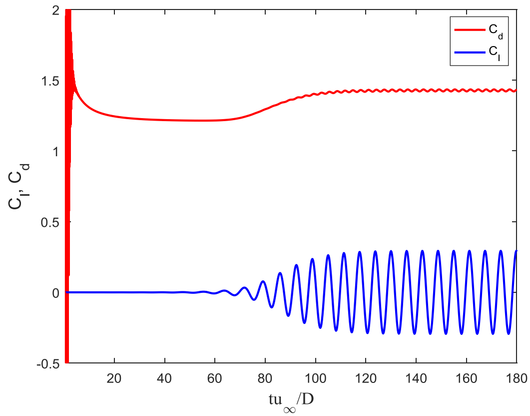
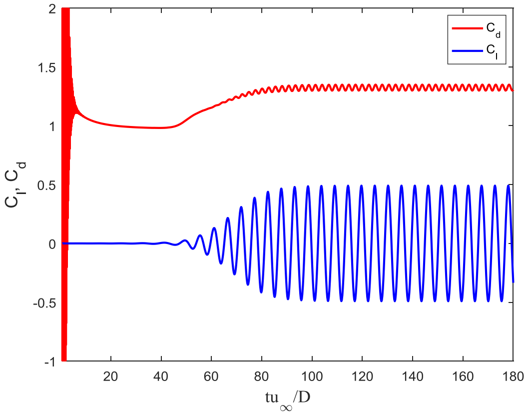


Figure 4.14: Đường bao xoáy cho bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định ở hệ số $Re = 100$ và $Re = 200$.



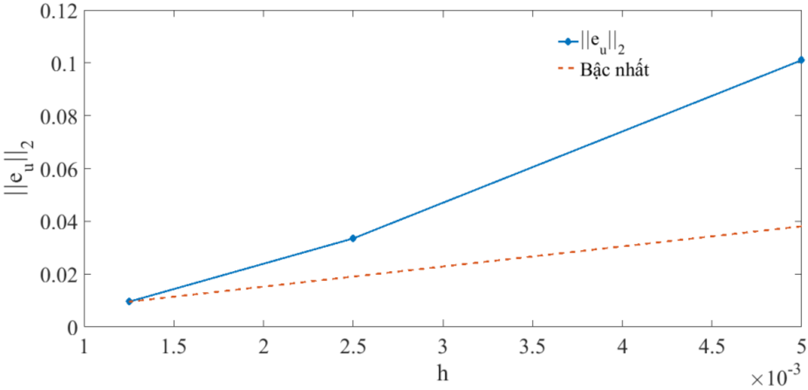
Hình 4.16: Hệ số nâng C_l và hệ số cản C_d theo thời gian của bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định ở hệ số $Re = 100$.



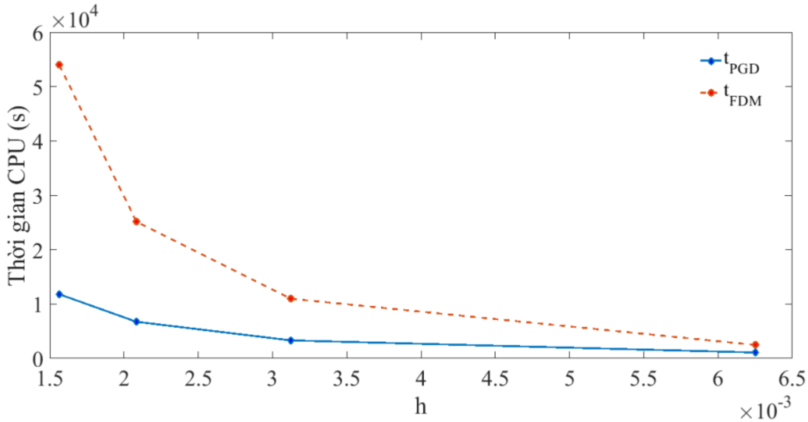
Hình 4.17: Hệ số nâng C_l và hệ số cản C_d theo thời gian của bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định ở hệ số $Re = 200$.

Bảng 4.2: Hệ số cản C_D, hệ số nâng C_L và số St của bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định ở hệ số $Re = 100$ và $Re = 200$.

	Tác giả	C_d	C_l	St
$Re = 100$	Lai và cộng sự [45]	1.447	±0.330	-
	Calhoun và cộng sự [134]	1.33 ± 0.014	±0.298	0.175
	Rusell và cộng sự [136]	1.38 ± 0.007	±0.300	0.169
	Le và cộng sự [84]	1.37 ± 0.009	±0.323	0.160
	Le và cộng sự [137]	1.39 ± 0.009	±0.346	0.160
	Kang và cộng sự [138]	1.399	±0.343	0.162
	Luận án	1.43±0.007	±0.294	0.161
$Re = 200$	Calhoun và cộng sự [134]	1.17 ± 0.058	±0.67	0.202
	Rusell và cộng sự [136]	1.29 ± 0.022	±0.50	0.195
	Le và cộng sự [84]	1.34 ± 0.030	±0.43	0.187
	Le và cộng sự [137]	1.38 ± 0.040	±0.67	0.192
	Luận án	1.32 ± 0.025	±0.491	0.189

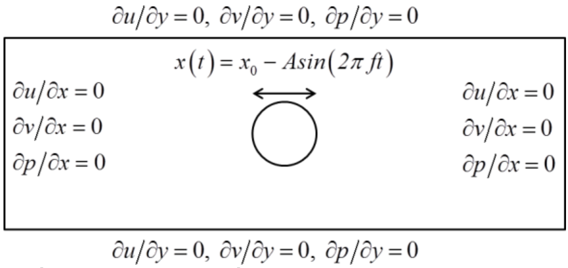


Hình 4.18: Sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang ở các bước lưới khác nhau cho bài toán bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở hệ số $Re = 100$.

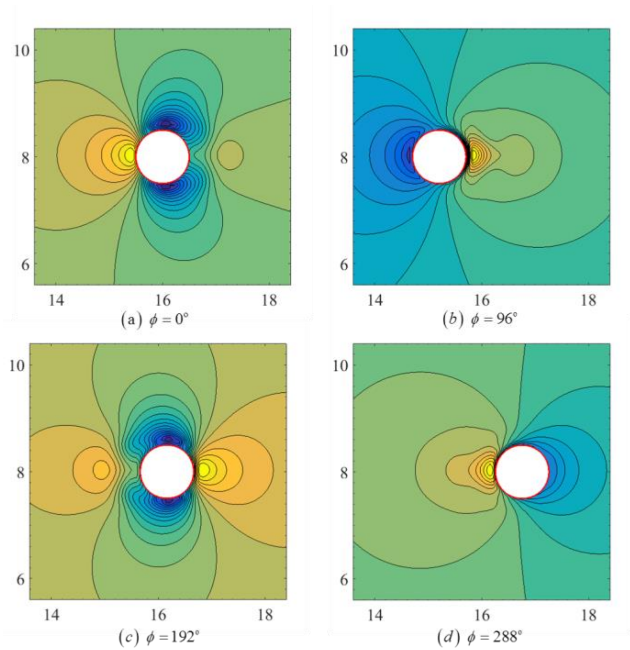


Hình 4.19: So sánh thời gian tính toán của phương pháp PGD với phương pháp sai phân hữu hạn cho bài toán dòng chảy qua trụ tròn cố định ở hệ số $\mathrm{Re} = 100$.

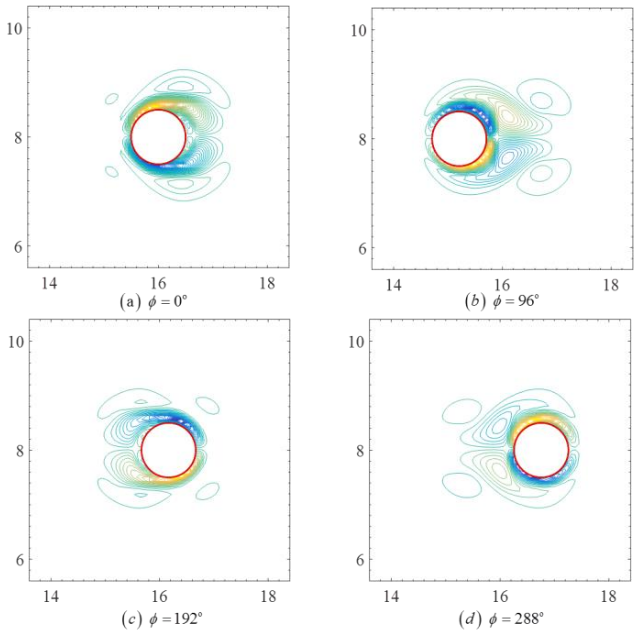
4.4.3. Bài toán trụ tròn dao động trực tuyến trong một miền lưu chất tĩnh



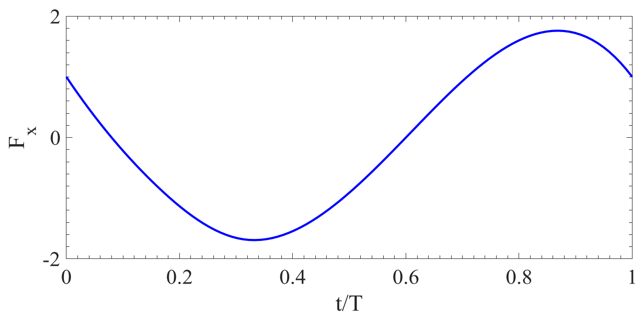
Hình 4.20: Điều kiện biên và miền tính toán của bài toán trụ tròn dao động trực tuyến trong một miền lưu chất tĩnh.



Hình 4.21: Áp suất xung quanh trụ tròn cho bài toán trụ tròn dao động trực tuyến trong một miền lưu chất tĩnh ở các thời điểm khác nhau:
$\phi = 2\pi ft = 0^{\circ}$, 96° , 192° , 288° .

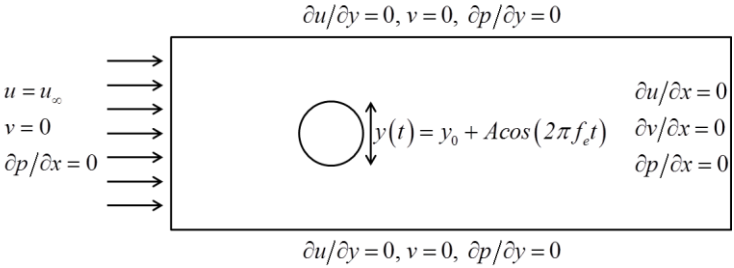


Hình 4.22: Xoáy cho bài toán trụ tròn dao động trực tuyến trong một miền lưu chất tĩnh ở các thời điểm khác nhau: $\phi = 2\pi ft = 0^o$, 96^o , 192^o , 288^o .

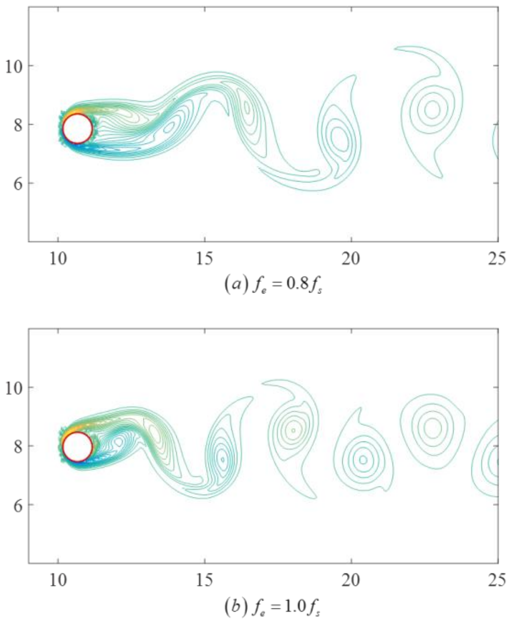


Hình 4.23: Đồ thị lực cản trong một chu kỳ dao động cho bài toán trụ tròn dao động trực tuyến trong một mình lưu chất tĩnh.

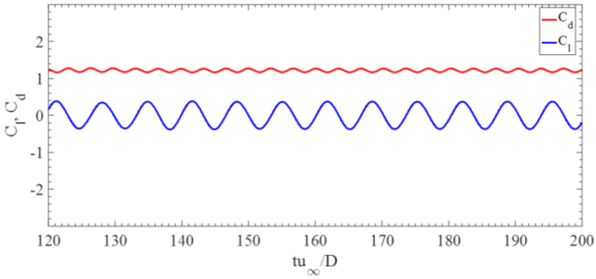
4.4.4. Bài toán trụ tròn dao động cắt ngang trong một dòng chảy tự do



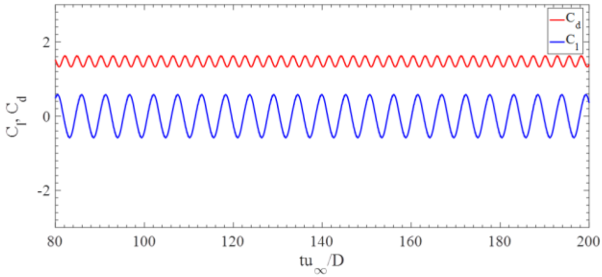
Hình 4.24: Điều kiện biên cho bài toán trụ tròn dao động cắt ngang trong một dòng chảy tự do.



Hình 4.25: Trường xoáy tức thời của bài toán trụ tròn dao động cắt ngang trong một dòng chảy tự do ở các tần số $f_e = 0.8 f_s$ và $f_e = 1.1 f_s$.



(a) $f_e = 0.8 f_s$



(b) $f_e = 1.0 f_s$

Hình 4.26: Đồ thị lực nâng và lực cản của bài toán trụ tròn dao động cắt ngang trong một dòng chảy tự do ở các tần số $f_e = 0.8 f_s$ và $f_e = 1.1 f_s$.

Bảng 4.3: Lực cản trung bình và biên độ dao động của lực nâng và lực cản của bài toán trụ tròn dao động cắt ngang một dòng chảy tự do .

	Tác giả	$\bar{C}_d$	$(C_d')_{rms}$	$(C_l')_{rms}$
$f_e/f_s = 0.8$	Guilmineau & Queutey [140]	1.194	0.038	0.074
	Kim & Choi [30]	1.235	0.037	0.068
	Uhlmann [57]	1.380	-	0.176
	Yang và cộng sự [63]	1.290	0.043	0.070
	Cai [127]	1.229	0.036	0.235
	Luận án	1.217	0.035	0.239
$f_e/f_s = 1.0$	Guilmineau & Queutey [140]	1.506	0.134	0.420
	Kim & Choi [30]	1.537	0.140	0.376
	Cai [127]	1.511	0.117	0.442
	Luận án	1.477	0.102	0.436

Chương 5
PHƯƠNG PHÁP BIÊN NHÚNG KẾT HỢP VỚI PHƯƠNG PHÁP PGD CHO BÀI TOÁN DÒNG CHẢY NHỚT KHÔNG NÉN QUA VẬT THỂ BIÊN ĐÀN HỒI

5.1. Giới thiệu

Trong chương này sẽ đề xuất IBM kết hợp với phương pháp PGD để giải các bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên đàn hồi. Ảnh hưởng của biên đàn hồi lên lưu chất được thay thế bằng cách đưa thành phần lực cưỡng bức vào phương trình chuyển động của lưu chất thông qua IBM. Sự phân ly giữa áp suất và vận tốc được thực hiện bằng phương pháp chiếu, sau đó phương pháp PGD được áp dụng để giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng để tìm các biến của dòng chảy.

5.2. Hệ phương trình chuyển động

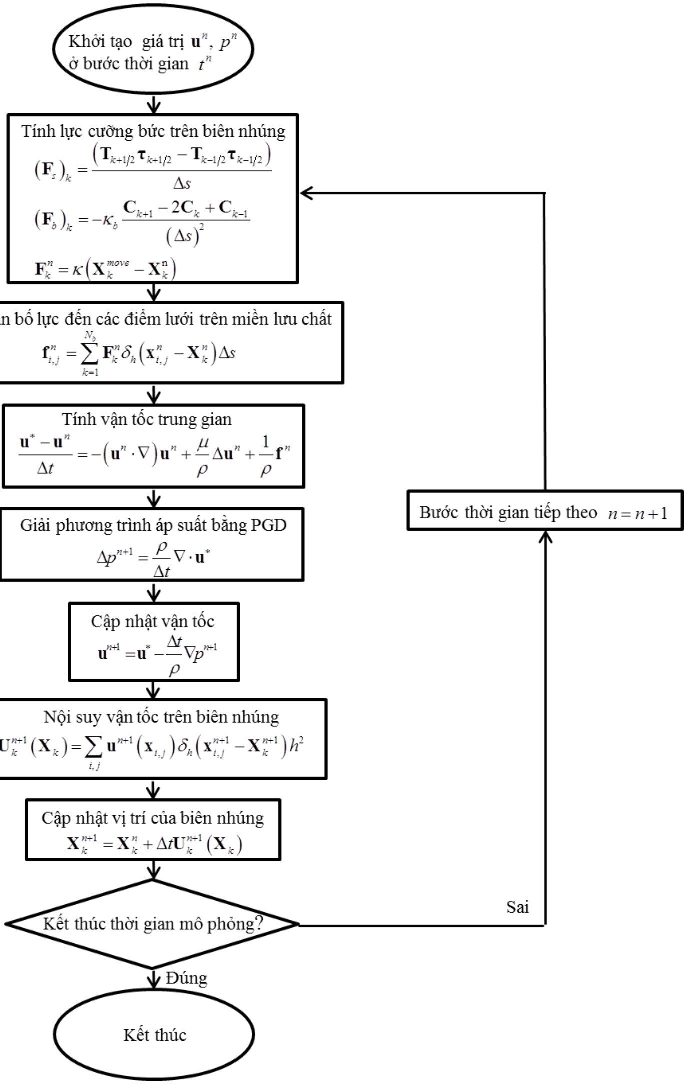
$$\rho(\mathbf{x},t)\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right)=-\nabla p+\mu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{f}(\mathbf{x},t)-\rho(\mathbf{x},t)\mathbf{g} \tag{5.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{5.2}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t)=\int_{\Gamma}\mathbf{F}(s,t)\delta\big(\mathbf{x}-\mathbf{X}(s,t)\big)ds \tag{5.3}$$

$$\rho(\mathbf{x},t)=\rho_f+\int_{\Gamma}\rho_s(s)\delta\big(\mathbf{x}-\mathbf{X}(s,t)\big)ds \tag{5.4}$$

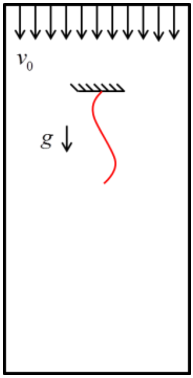
5.3. Giải thuật tổng quát



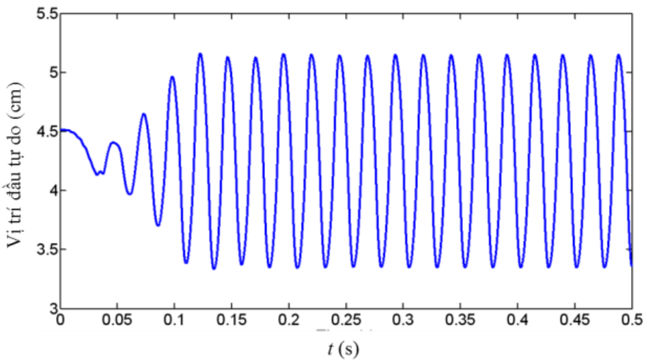
Hình 5.3: Sơ đồ giải thuật kết hợp phương pháp IB với phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên đàn hồi.

5.4. Kết quả mô phỏng số

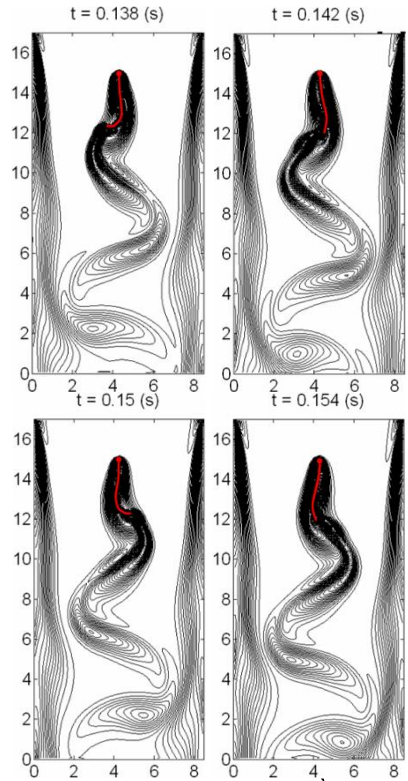
5.4.1. Bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với một sợi đàn hồi



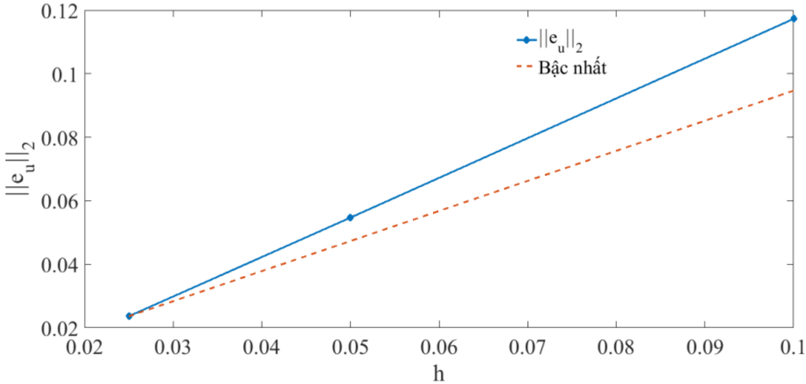
Hình 5.4: Dòng chảy nhớt không nén qua một sợi đàn hồi.



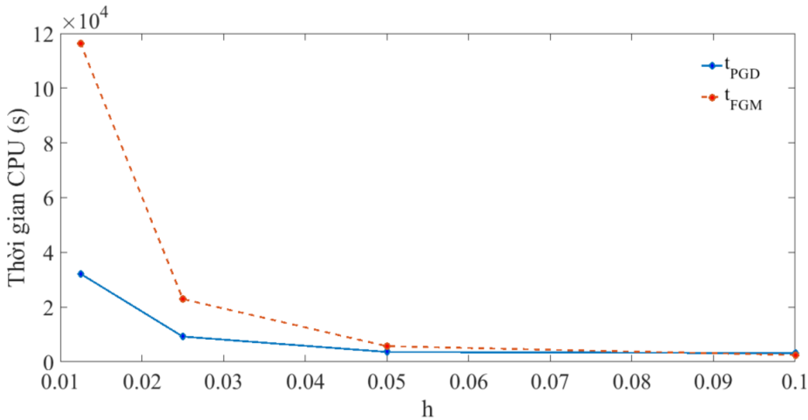
Hình 5.8: Tọa độ đầu tự do theo phương x của sợi đàn hồi



Hình 5.6: Đường bao xoáy quanh một sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở các thời điểm khác nhau.

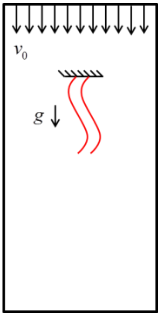


Hình 5.9: Sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang ở các bước lưới khác nhau cho bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với một sợi đàn hồi.

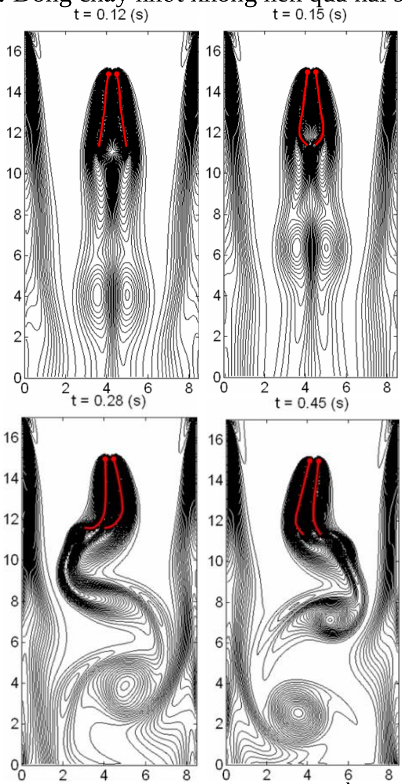


Hình 5.10: So sánh thời gian tính toán của phương pháp PGD với phương pháp sai phân hữu hạn cho bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với một sợi đàn hồi.

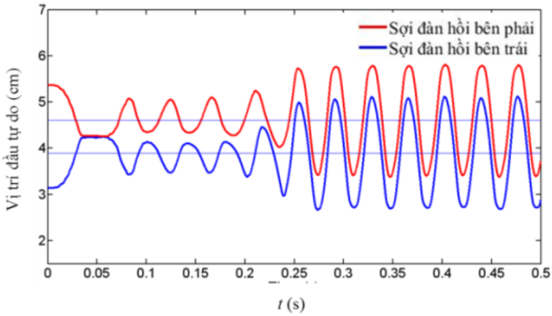
5.4.2. Bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với hai sợi đàn hồi



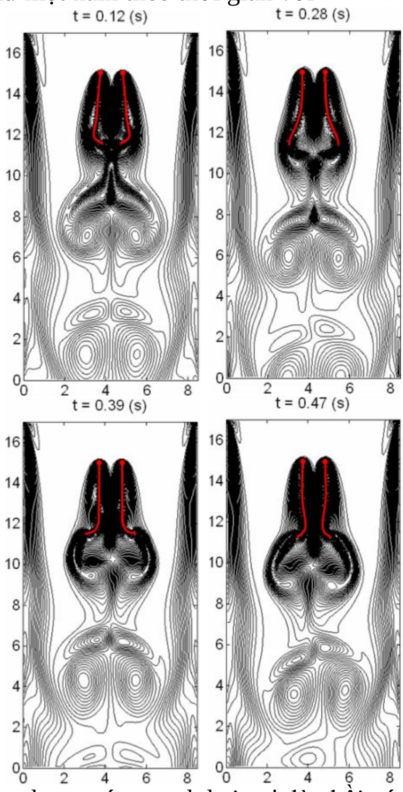
Hình 5.11: Dòng chảy nhớt không nén qua hai sợi đàn hồi.



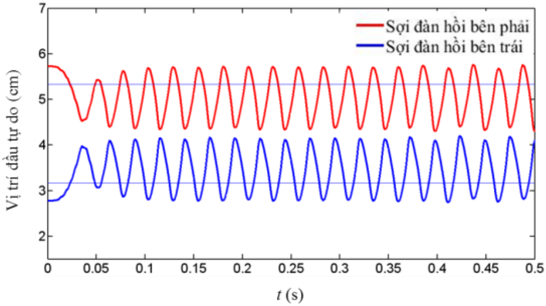
Hình 5.12: Đường bao xoáy quanh hai sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở với $d = 0.1L$.



Hình 5.14: Tọa độ theo phương x của hai đầu tự do sợi đàn hồi như một hàm theo thời gian với $d = 0.1L$.

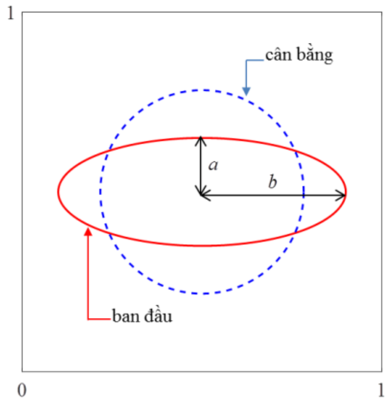


Hình 5.15: Đường bao xoáy quanh hai sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén với $d = 0.3L$.



Hình 5.17: Tọa độ đầu tự do theo phương x của hai sợi đàn hồi như một hàm theo thời gian.

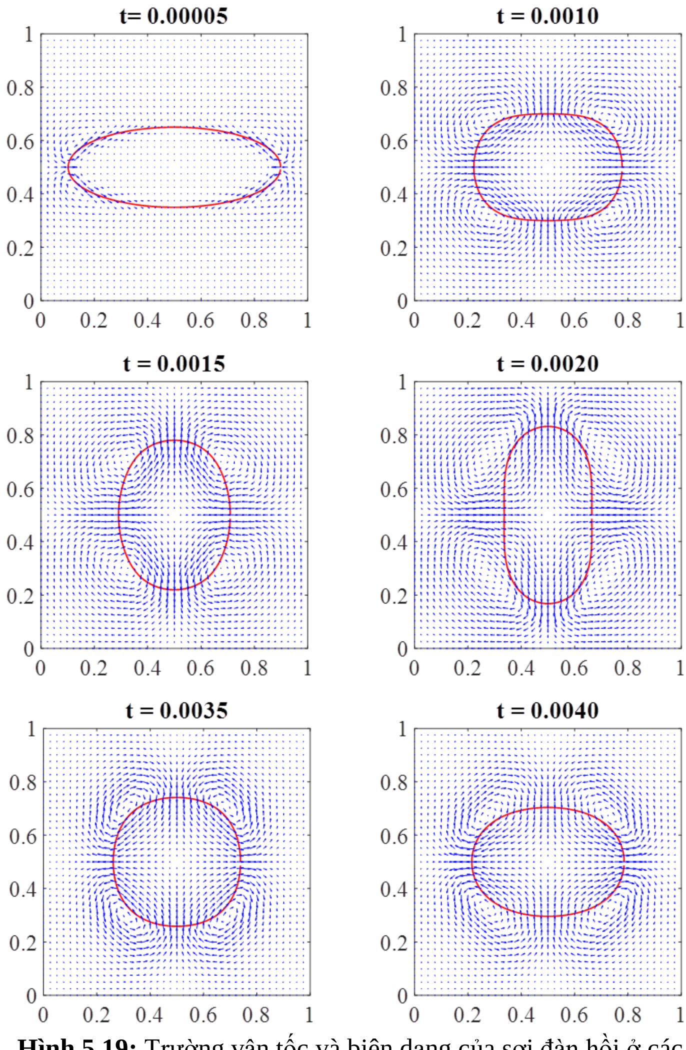
5.6.3. Bài toán sợi đàn hồi khép kín trong miền lưu chất tĩnh



Hình 5.18: Cấu trúc ban đầu và trạng thái cân bằng của sợi đàn hồi khép kín.

Bảng 5.3: So sánh sự mất mát diện tính tính toán ở thời điểm $t = 0.020$ s.

Tác giả	Số điểm lưới lưu chất $n_x \times n_y$	Số điểm rời rạc màng đàn hồi n_b	Diện tích tính toán A	Diện tích mất mát %
Stockie và cộng sự [144]	64×64	192	-	4.4
Stockie [145]	64×64	192	-	7.6
Luận án	64×64	192	0.2401	4.7



Hình 5.19: Trường vận tốc và biên dạng của sợi đàn hồi ở các thời điểm khác nhau.

Chương 6
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

6.1. Kết luận

Thông qua các kết quả đạt được trong suốt quá trình nghiên cứu, luận án rút ra một số kết luận như sau:

- Luận án đã áp dụng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn để giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng bậc cao trong không gian hai chiều và không gian ba chiều, đặc biệt với phương trình Biharmonic trong không gian ba chiều đã được giải bằng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn với sai số đạt được là 1.44×10^{-9} với số điểm lưới trên mỗi chiều $n=64$ nhưng chỉ với thời gian giải $t=0.156$ s. Các kết quả tính toán cho thấy sự vượt trội về tốc độ tính toán của phương pháp PGD với các kết quả tham khảo.
- Luận án đã đề xuất giải thuật và giải các bài toán về dòng chảy nhớt không nén ở các điều kiện biên và miền vật lý khác nhau bằng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn. Với bài toán Lid-driven cavity, các kết quả về hình dạng của đường dòng, xoáy và tọa độ của tâm xoáy trung tâm ở các hệ số Reynolds khác nhau cho thấy sự đồng thuận khá tốt với các kết quả tham khảo. Ở bài toán Backward-facing step, các kết quả về đường dòng và chiều dài vùng xoáy cũng cho thấy sự tương đồng với các kết quả khảo đã công bố. Các kết quả khảo sát về sai số cho thấy bậc hội tụ của phương pháp đề xuất có bậc cao hơn bậc nhất. Thời gian tính toán của phương pháp PGD so với phương pháp sai phân hữu hạn cũng được khảo sát với bài toán Lid-driven cavity, kết quả cho thấy lời giải PGD có thời gian vượt trội hơn so với phương pháp sai phân hữu hạn ($t_{FDM}/t_{PGD}=3.1$ với 640×640 điểm lưới).
- Luận án đã đề xuất kết hợp phương pháp IB kết hợp với phương pháp PGD để giải quyết các bài toán tương tác giữa lưu chất với vật cản biên cứng đứng yên và di chuyển. Các bài toán minh họa về dòng chảy nhớt không nén qua trụ tròn đứng yên và trụ tròn di chuyển ở các điều kiện biên và hệ số Reynolds khác nhau đã được mô phỏng. Các kết quả mô phỏng cho thấy sự đồng thuận khá tốt của phương pháp đề xuất với các kết quả tham khảo. Đánh giá sai số của phương pháp đề xuất cũng được thực hiện ở bài toán Backward-facing step flow với trụ tròn ở tâm của miền tính toán và bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định. Sai số của bài toán Backward-

facing step flow với trụ tròn ở tâm của miền tính toán có bậc hội tụ là 1.32, trong khi đó sai số của bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định có bậc hội tụ là 1.36.

- Luận án đã đề xuất kết hợp phương pháp IB và phương pháp PGD để giải quyết các bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên đàn hồi. Các kết quả khảo sát về dòng chảy và sợi đàn hồi được trình bày và so sánh với các kết quả nghiên cứu cho thấy sự đồng thuận rất tốt của phương pháp mà luận án đã đề xuất. Sai số của phương pháp đề xuất được khảo sát với bài toán dòng chảy nhớt không nén qua một sợi đàn hồi, kết quả cho thấy sai số có bậc hội tụ là 1.15. Thời gian tính toán của phương pháp PGD và phương pháp sai phân hữu hạn cũng được khảo sát trong trường hợp bài toán dòng chảy nhớt không nén qua một sợi đàn hồi, kết quả cho thấy ưu điểm về thời gian tính toán của phương pháp PGD so với phương pháp sai phân hữu hạn, tỉ lệ $t_{FDM}/t_{PGD} = 2.5$ ở 340×680 điểm lưới và $t_{FDM}/t_{PGD} = 3.6$ ở 680×1360 điểm lưới.
- Từ các kết quả đã phân tích, luận án cho thấy tính khả thi và hiệu quả khi áp dụng phương pháp biên nhúng kết hợp với phương pháp PGD để giải quyết nhiều dạng bài toán FSI khác nhau trong cả trường hợp dòng chảy nhớt không nén qua vật cản có biên đứng yên và biên di chuyển.

6.2. Kiến nghị

Trong suốt quá trình nghiên cứu, luận án đã gặp phải một số khó khăn và còn tồn tại những hạn chế nhất định. Sau đây là một số hướng nghiên cứu mở rộng của luận án trong thời gian sắp tới:

- Nghiên cứu phát triển phương pháp PGD để xử lý các bài toán với điều kiện biên phức tạp hơn.
- Mở rộng phương pháp đề xuất cho các bài toán tương tác rắn-lỏng phức tạp hơn như: kết hợp quá trình truyền nhiệt, các bài toán trương tự trong trường hợp dòng chảy nhớt nén được, hoặc các bài toán tương tự với dòng chảy rối.
- Mở rộng áp dụng phương pháp đề xuất cho các bài toáng tương tác rắn-lỏng trong không gian ba chiều.
- Mở rộng việc kết hợp phương pháp PGD với các phương pháp số khác như: đẳng hình học, phần tử hữu hạn, radial basis function, … để tìm kiếm lời giải hiệu quả.

MINISTRY OF EDUCATION AND TRAINING

UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND EDUCATION

HO CHI MINH CITY

LE QUOC CUONG

DEVELOPMENT OF IMMERSED BOUNDARY METHOD COMBINE WITH PROPER GENERALIZED DECOMPOSITION METHOD FOR THE PROBLEMS OF INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOW PAST RIGID AND ELASTIC BOUNDARY OBJECTS

ABSTRACT OF Phd THESIS

MAJOR: ENGINEERING MECHANICS

MAJOR CODE: 9520101

Ho Chi Minh City, 9/2019

THE WORK IS COMPLETED AT

UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND EDUCATION

HO CHI MINH CITY

Supervisor 1: Assoc. Prof. Dr. Nguyen Hoai Son

Supervisor 2: Dr. Phan Duc Huynh

PhD thesis is protected in front of

EXAMINATION COMMITTEE FOR PROTECTION OF

DOCTORAL THESIS

UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND EDUCATION

HO CHI MINH CITY.

Date ….. month ….. year …

LIST OF PUBLICATIONS

Chapter 2:

1. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Phan Đức Huynh và Nguyễn Bá Duy, "Giải phương trình 3D Biharmonic bằng phương pháp PGD kết hợp HOCFD," *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, 8-9/12/2017, Hà Nội – Việt Nam.*

2. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Nguyễn Bá Duy và Phan Đức Huynh, "Phương pháp PGD kết hợp HOCFD cho bài toán tấm mỏng chịu uốn," *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, 8-9/12/2017, Hà Nội – Việt Nam.*

Chapter 3:

1. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Phan Đức Huynh, "Phương pháp Proper Generalized Decomposition cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua một miền vuông," *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc, 2015, 45-52, ISBN: 978-604-84-1272-2.*

2. Huynh, P.D., **Cuong, L.Q, "**The numerical simulation of heat transfer and fluid flow problems by using the proper generalized decomposition method," *Proceedings of the 2012 International Conference on Green Technology and Sustainable Development (GTSD2012), HoChiMinh City, Vietnam, 35-39, 2012.*

Chapter 4:

1. **C. Le-Quoc**, Linh A. Le, V. Ho-Huu, P. D. Huynh, and T. Nguyen-Thoi, "An Immersed Boundary Proper Generalized Decomposition (Ib-Pgd) for Fluid–Structure Interaction Problems," *International Journal of Computational Methods*, (2017), 1850045. (ISI)

2. **Lê Quốc Cường**, Phan Đức Huynh, Nguyễn Hoàng Sơn, "Mô phỏng dòng chảy nhớt không nén qua trụ tròn bằng phương pháp biên nhúng kết hợp PGD," *Tạp chí Khoa học và Công nghệ các trường Đại học kỹ thuật*, 2014 (102), 101-105.

3. **Cuong, L.Q,** Huynh, P.D, "Numerically study effectiveness of control surface on aerodynamic of bridge deck by using immersed boundary method," *Proceedings of the 2012 International Conference on Green Technology and Sustainable Development (GTSD2012), HoChiMinh City, Vietnam, 1-5, 2012.*

4. **Lê Quốc Cường**, Phan Đức Huynh, Nguyễn Hoài Sơn và Nguyễn Bá Duy, "Phương pháp IB-PGD dựa trên sơ đồ sai phân bậc hai trên lưới không đều cho các bài toán tương tác rắn – lỏng," *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, 8-9/12/2017, Hà Nội – Việt Nam.*

Chapter 5:

1. **Cuong Q. Le**, H. Phan-Duc, Son H. Nguyen, "Immersed Boundary Method Combined With Proper Generalized Decomposition For Simulation Of A Flexible Filament In A Viscous Incompressible Flow," *Vietnam Journal of Mechanics*, 2017 (2), 109-119, ISSN: 0866-7136.

2. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Phan Đức Huynh, "Mô phỏng số tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với sợi đàn hồi bằng phương pháp Proper Generalized Decomposition kết hợp với phương pháp biên nhúng," *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc, 2015, 35-44, ISBN: 978-604-84-1272-2.*

Chapter 1
OVERVIEW

1.1. Introduction

The fluid-structure interaction (FSI) problem is one of the problems that are of interest in science and engineering. FSI problems can be found in areas such as bridge aerodynamics [1, 2], oscillation of wind turbine blades [3-5], the impact of wind on high-rise buildings [6, 7], aerodynamic response of aircraft [8], interaction between wind and trees [9] and many biological flow problems such as interaction between blood and heart valves [10, 11], simulating flight and swimming process of creatures [12, 13] ...

Because FSI problems are multi-field interactive physical problems, solving the above problems will be difficult to perform by analytic methods, instead of FSI problems are often solved by numerical methods. The Immersed boundary method (IBM) is an effective tool for problems with moving boundaries or complex computational domains. IBM solves FSI problems by replacing the effect of objects in the fluid flow by introducing a force component on the flow through a dirac delta distribution function, when the calculated domain is considered is a homogeneous fluid domain and the remesh costs after each time step are eliminated.

However, FSI problems in two-dimensional or three-dimensional space when solved by IBM based on traditional meshing methods (finite difference, finite element or finite volume ...), the meshing will require a very large number of grid variables. This leads to problems such as time-consuming computation, complexity in meshing algorithms, as well as large storage resources. The Proper generalized decompostion (PGD) method proposed by Ammar et al. [25, 26] is an effective and promising method. PGD method finds solutions of multi-dimensional problems by turning multi-dimensional problems into a series of one-dimensional problems to solve.

By exploiting the advantages of both IB and PGD methods, the objective of the thesis is to combine IB and PGD methods to solve the problem of uncompressed viscous flow through rigid boundary objects [27].] and elastic boundary [28]. In this combination, the formulas of the IB method are used to build the interaction between the fluid and the structure by introducing a forced force component into the Navier-Stokes equations. Later, the PGD method was used to find the solution of the Navier-Stokes system. By doing this, the advantages of IB and PGD methods will be effectively exploited. Embedded boundary formulas handle complex margins of the FSI problem while PGD method increases the computational speed and reduces the complexity of multidimensional problems.

1.2. Overview on IB method

1.2.1. Classical IB method

The classic IB method was first introduced by Peskin [29] to simulate blood flow through the heart valve. From the original method, variations of this method class have been proposed to solve the problems of flow through rigid boundary object. For example, in the announcement of Angot et al. [48] and Khadra et al. [49] simulated the assumed flow in an empty environment. In contrast, Glowinski et al. [50] developed a virtual domain or Lagrange factor distribution method, which considers solid objects as fluids subjected to a rigid constraint.

1.2.2. Direct forcing IB method

Direct forcing IBM was proposed by Mohd-Yosuf [55] and Fadlun et al. [56] for problems of flow through rigid boundary objects through the modification of discrete momentum equations.

Direct forcing IBM has been developed and improved by combining with the classical method, velocity and force on fluid grids and embedded boundary can be transformed using discrete delta functions.

1.2.3. Projection IB method

To enforce non-slip boundary conditions correctly, Taira & Colonius [64] proposed projection IB method. By considering the boundary force as a Lagrange factor to satisfy the non-slip boundary condition on the embedded boundary, the projection IB method combines the two Lagrange factors for pressure and boundary force into a corrected Poisson equation. This method is very accurate because it enforces the free divergence condition and the no-slip boundary condition simultaneously in the projection step.

1.2.4. Ghost-cell IB method

Tseng & Ferziger [67] and Mittal et al. [68] extended the method of Mohd-Yosuf [55] and Fadlun et al. [56] through a ghost cell method. The ghost cell is defined inside of the embedded boundary so that each ghost cell has at least one adjacent point in the fluid domain. The local flow variable is then expressed through a polynomial (linear or quadratic) and the value of the weighted ghost cell is calculated by the value of the adjacent grid points.

1.2.5. Cut-cell IB method

In the cut-cell IBM, the fluid cells cut by the embedded boundary are determined, and the cut lines of the boundaries with these cells are calculated. Next, the cut cells whose centers are within the fluid are reconstructed into other cells. This method retains quadratic spatial accuracy and leads to a sharp interface.

1.2.6. Immersed interface method

The immersed interface method was first introduced by LeVeque & Li [77] to improve the accuracy of the classical IB method. It was extended to the Stokes equations [78] and the Navier-Stokes equations[79, 80]. The immersed interface method has the same idea as the classical IB method, in that the effect of the immersed interface on the surrounding fluid is represented by the force at the points on the immersed boundary. Instead of distributing the force at the points on the boundary to the fluid as in the classical IB method, the immersed interface method introduces the jumping conditions into finite difference scheme to calculate the influence of force on fluid.

1.2.7. Non-primitive variable IB method

The IB method has also successfully integrated in the non-basic variable formulas of fluid flow. Ren et al. [86] presented the IB method in streamfunction – vorticity. In this method, the required boundary conditions are achieved by correcting the velocity and vorticity.

1.3. Overview on PGD method

The PGD can build low-dimensional separated representations of the solutions without the knowledge of pre-computed data. Therefore, the computational costs and complexity of the PGD solution for multi-dimensional problems are significantly reduced. Recently, PGD method has been applied to solve technical problems such as composite materials [104-108], structure optimization [109], fluid flows [110, 111], quantum chemistry [112] heat transfer [113, 114], material fatigue analysis [115], robot simulations [116], nuclear power [117]. An overview of the PGD method can be found in [118, 119]. In the group of problems of fluid-structure interaction, the PGD method has also been applied in some recent studies such as published by Dumon et al. [120] used PGD method in combination with finite volume method to solve the Navier-Stokes equations for both steady and unsteady lid-driven cavity problems with different Reynolds numbers, and Dumon et al. [121] also combined PGD with spectral methods to solve the flow problem over a square domain. However, studies conducted on the PGD for FSI problems are somewhat still limited and mainly focus on simple computational domain, usually rectangular area without obstacles. When there are obstacles, the interaction between the fluid and the structure will become very complicated because the fluid will not only interact with the normal boundary but also with any obstacle. The PGD method will solve problems very quickly, but in order to effectively solve FSI problems with complex computational domain, the solving of domain problems should be done before using PGD method to solve the equation of fluid flow.

1.4. Objective of this thesis

Researching numerical method to simulate the problem of incompressible viscous flow (in the case of flow at low Reynolds coefficients) past rigid boundary and elastic boundary is specified as follows:

- Application of PGD method in combination with finite difference method to solve high order partial differential equations.
- Application of PGD method in combination with finite difference method to solve incompressible viscous flow problems with different boundary conditions.
- Development of IB method combined with PGD method to solve problems of incompressible viscous flow past stationary and moving rigid boundary obtacles.
- Development of IB method combined with PGD method to solve problems of incompressible viscous flow past elastic boundary objects.

1.5. Scope of the study

- The thesis focuses on studying algorithm in combining IB method and PGD method for problems in two-dimensional space.
- The problem of fluid-structure interaction investigated in the thesis is the problem of incompressible viscous flow with the condition of laminar flow (at low Reynolds coefficient).

1.6. Research methods

- Studying documents, scientific publications about IB method and PGD method
- Modeling problems on fluid-structure interactions.
- Developing simulation programs using Matlab programming language to survey problems.

1.7. Theoretical and academic contribution of the dissertation

- Developing PGD method coupled with finite difference method to solve higher order partial differential equations (Biharmonic equation, Poisson equation) in two-dimensional and three-dimensional space.
- Appling PGD method combined with projection method to solve incompressible viscous fluid flow problems with different boundary conditions.
- Developing classic IBM solve the problems of incompressible viscous fluid flow past moving rigid bodies.
- Developing IBM in conjunction with the PGD variable separation method simulates the problem of incompressible viscous flow past moving rigid bodies.
- Developing IBM combined with the PGD variable separation method to simulate the problem of incompressible viscous flow past elastic boundary objects.

Chapter 2
PROPER GENERALIZED DECOMPOSITION FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

2.1. Introduction

The PGD method is a model order reduction method based on the separation of variables, the solution $u\left(x_1, x_2, ..., x_N\right)$ of the problem is found in the following form

$$u\left(x_1, x_2, ..., x_N\right) \approx \sum_{i=1}^{Q} \prod_{k=1}^{n} F_{ki}\left(x_k\right) = \sum_{i=1}^{Q} F_{1i}\left(x_1\right) F_{2i}\left(x_2\right) \cdots F_{Ni}\left(x_N\right) \tag{2.2}$$

Where x_i can be a scalar or vector variable involing space, time or any orther parameter of the problem.

2.2. PGD approach for partial differential equation

2.2.1. Theoretical basis of PGD method

Consider the problem as follow:

$L(U) = g$ in $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$

PGD method finds the approximate solution of the problem $U(x, y) \in \Omega = X \times Y \subset R$ with $x \in X \subset R$ and $y \in Y \subset R$ as:

$$U(x, y) \approx \sum_{i=1}^{n} F^i(x) \cdot G^i(y) \tag{2.4}$$

The process of solving for Eq. 7 by the PGD is also an iterative procedure. The solutions at step $m+1$ is a product sum of functions of each space variable as

$$U\left(x, y\right) \approx \sum_{i=1}^{n-1} F^i(x) \cdot G^i(y) + F^n(x) \cdot G^n(y) \tag{2.5}$$

Introducing equation (2.5) into eqution (2.3), one obtains

$$L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x) \cdot G^i(y) + F^n(x) \cdot G^n(y) \right) = g + r\mathrm{e}^n \tag{2.6}$$

where re^n is a residual. To determind F^n and G^n, equation (2.6) is projected onto each of the unknows F^n and G^n

$$\left\langle L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x)\cdot G^i(y) + F^n(x)\cdot G^n(y)\right), F^n\right\rangle_{L^2(X)} = \left\langle g, F^n\right\rangle_{L^2(X)} + \left\langle re^n, F^n\right\rangle_{L^2(X)} \tag{2.7}$$

and

$$\left\langle L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x)\cdot G^i(y) + F^n(x)\cdot G^n(y)\right), G^n\right\rangle_{L^2(Y)} = \left\langle g, G^n\right\rangle_{L^2(Y)} + \left\langle re^n, G^n\right\rangle_{L^2(Y)} \tag{2.8}$$

Where $\langle .,.\rangle_{L^2(X)}$ and $\langle .,.\rangle_{L^2(Y)}$ are the scalar product on L^2, in the x direction and y direction, respectively. In this approach, the residual must be orthogonal to the F^n and G^n functions, thus

$$\left\langle L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x)\cdot G^i(y) + F^n(x)\cdot G^n(y)\right), F^n\right\rangle_{L^2(X)} = \left\langle g, F^n\right\rangle_{L^2(X)} \tag{2.9}$$

and

$$\left\langle L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x)\cdot G^i(y) + F^n(x)\cdot G^n(y)\right), G^n\right\rangle_{L^2(Y)} = \left\langle g, G^n\right\rangle_{L^2(Y)} \tag{2.10}$$

In order to obtain the new function F^n and G^n, equations (2.9) and (2.10) must be solved simultaneously by applying a iteration algorithm until the solution of the problem converges.

2.2.2. The PGD approach for high order differential equation

2.2.2.1. Poisson equation

Xét phương trình Poisson trong không gian 3D như sau

Consider 3D Poisson equation as follows

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f\left(x, y, z\right) \tag{2.11}$$

The PGD algorithm is applied to solve 3D Poisson equation by solving three 1D differential equations as follows:

Step 1: Find function $R(x)$

Supposing $S(y)$ and $T(z)$ are known, then $S^*(y)=0$ and $T^*(z)=0$. Solving following equation to find $R(x)$

$$\begin{aligned}\left(a_y a_z\right)\frac{d^2R}{dx^2}+\left(b_y a_z+a_y b_z\right)R=af_x-\sum_{i=1}^{n}\frac{d^2X_i}{dx^2}\left(a_{y_i}a_{z_i}\right)\\ -\sum_{i=1}^{n}X_i\left(b_{y_i}a_{z_i}\right)-\sum_{i=1}^{n}X_i\left(a_{y_i}b_{z_i}\right)\end{aligned} \tag{2.20}$$

Step 2: Find function $S(y)$

From function $R(x)$ just found in step 1, and assume function $T(z)$ is known, then $R^*(x)=0$ and $T^*(z)=0$. Solving following equation to search function $S(y)$

$$\begin{aligned}\left(a_x a_z\right)\frac{d^2S}{dy^2}+\left(b_x a_z+a_x b_z\right)S=a_{fy}-\sum_{i=1}^{n}\frac{d^2Y_i}{dy^2}\left(a_{x_i}a_{z_i}\right)\\ -\sum_{i=1}^{n}Y_i\left(b_{x_i}a_{z_i}\right)-\sum_{i=1}^{n}Y_i\left(a_{x_i}b_{z_i}\right)\end{aligned} \tag{2.23}$$

Step 3: Find function $T(z)$

From function $R(x)$ and function $S(y)$ just computed in step 1 and step 2, then $R^*=0$ and $S^*=0$. Solving following equation to find function $T(z)$

$$\begin{aligned}\left(a_x a_y\right)\frac{d^2T}{dz^2}+\left(b_x a_y+a_x b_y\right)T=a_{fz}-\sum_{i=1}^{n}\frac{d^2T_i}{dz^2}\left(a_{x_i}a_{y_i}\right)\\ -\sum_{i=1}^{n}T_i\left(b_{x_i}a_{y_i}\right)-\sum_{i=1}^{n}T_i\left(a_{x_i}b_{y_i}\right)\end{aligned} \tag{2.26}$$

These three steps must be repeated until convergence. The global stopping condition of the problem is calculated as follows

$$E = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - f\left(x, y, z\right) \right\|_2 < \varepsilon_u \tag{2.29}$$

where ε_u is a small enough constant. We can also calculate the global stopping condition by using the following formula

$$E = \frac{\left\| X_n\left(x\right) \cdot Y_n\left(y\right) \right\|_2}{\left\| \sum_{i=1}^{n} X_i\left(x\right) \cdot Y_i\left(y\right) \right\|_2} < \varepsilon_u \tag{2.30}$$

2.2.2.2. Biharmonic equation

Consider 3D Biharmonic as following

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial x^2} = f\left(x, y, z\right) \tag{2.31}$$

The PGD algorithm is applied to solve 3D Poisson equation by solving three 1D differential equations as follows:

Step 1: Find $R\left(x\right)$

$$\begin{aligned} &\left(a_y a_z\right)\frac{d^4 R}{dx^4} + \left(2b_y a_z + 2a_y b_z\right)\frac{d^2 R}{dx^2} + \left(c_y a_z + a_y c_z + 2b_y b_z\right)R \\ &= af_x - \sum_{i=1}^{n} \frac{d^4 X_i}{dx^4}\left(a_{y_i} a_{z_i}\right) - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2 X_i}{dx^2}\left(b_{y_i} a_{z_i} + a_{y_i} b_{z_i}\right) \\ &\qquad - \sum_{i=1}^{n} X_i\left(c_{y_i} a_{z_i} + a_{y_i} c_{z_i} + 2b_{y_i} b_{z_i}\right) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Step 2: Find $S\left(y\right)$

$$\begin{aligned} &\left(a_x a_z\right)\frac{d^4 S}{dy^4} + \left(2b_x a_z + 2a_x b_z\right)\frac{d^2 S}{dy^2} + \left(c_x a_z + a_x c_z + 2b_x b_z\right)S \\ &= af_y - \sum_{i=1}^{n} \frac{d^4 Y_i}{dy^4}\left(a_{x_i} a_{z_i}\right) - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2 Y_i}{dy^2}\left(b_{x_i} a_{z_i} + a_{x_i} b_{z_i}\right) \\ &\qquad - \sum_{i=1}^{n} Y_i\left(c_{x_i} a_{z_i} + a_{x_i} c_{z_i} + 2b_{x_i} b_{z_i}\right) \end{aligned} \tag{2.37}$$

Step 3: **Find** $T(z)$

$$\left(a_x a_y\right)\frac{d^4T}{dz^4}+\left(2b_x a_y+2a_x b_y\right)\frac{d^2T}{dz^2}+\left(c_x a_y+a_x c_y+2b_x b_y\right)T$$
$$=af_z-\sum_{i=1}^{n}\frac{d^4Z_i}{dz^4}\left(a_{x_i}a_{y_i}\right)-2\sum_{i=1}^{n}\frac{d^2T_i}{dz^2}\left(b_{x_i}a_{y_i}+a_{x_i}b_{y_i}\right)$$
$$-\sum_{i=1}^{n}T_i\left(c_{x_i}a_{y_i}+a_{x_i}c_{y_i}+2b_{x_i}b_{y_i}\right) \tag{2.38}$$

These three steps must be repeated until convergence. The global stopping condition of the problem is calculated as follows

$$E=\left\|\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4u}{\partial y^4}+\frac{\partial^4u}{\partial z^4}+2\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}+2\frac{\partial^4u}{\partial y^2\partial z^2}+2\frac{\partial^4u}{\partial z^2\partial x^2}-f\left(x,y,z\right)\right\|_2<\varepsilon_u\,, \tag{2.41}$$

We can also calculate the global stopping condition by using the following formula

$$E=\frac{\left\|X_n\left(x\right)\cdot Y_n\left(y\right)\right\|_2}{\left\|\sum_{i=1}^{n}X_i\left(x\right)\cdot Y_i\left(y\right)\right\|_2}<\varepsilon_u \tag{2.42}$$

2.3.4. Examples

Problem 1: Consider 2D Poisson equation in a rectangular domain as follows

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-8\pi^2\sin\left(2\pi x\right)\cos\left(2\pi y\right) \tag{2.50}$$

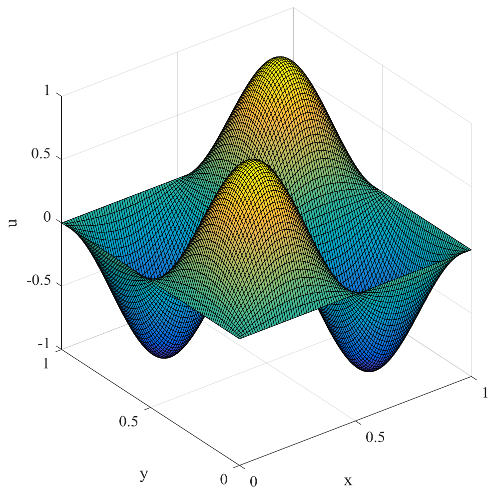


Figure 2.1: PGD solution of equation (2.50) .

Table 2.1: Error and computational time of PGD solution for equation (2.50)

	Computational time (s)	$\max\left(\lvert u_{\text{ex}}-u\rvert\right)$	$\sqrt{\frac{1}{n_x \times n_y}\sum_{i,j}\left(\left(u_{\text{ex}}\right)_{i,j}-u_{i,j}\right)^2}$
$n=20$	0.0774	0.0011	0.0021
$n=40$	0.0812	1.33×10^{-5}	2.20×10^{-5}
$n=60$	0.0847	1.22×10^{-6}	2.01×10^{-6}
$n=80$	0.0873	2.82×10^{-7}	5.08×10^{-7}
$n=100$	0.0886	1.01×10^{-7}	1.91×10^{-7}

Problem 2: Consider Poisson equation in three-dimentional space as follows

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z) \qquad (2.52)$$

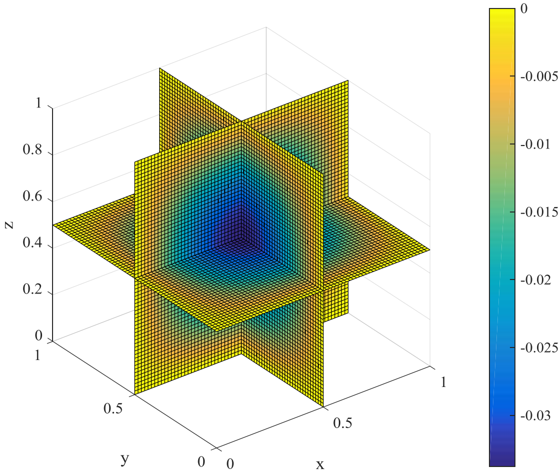


Figure 2.2: PGD solution of equation (2.52)

Table 2.2: Computational time and error of PGD solution for equation (2.52)

	Author	Computational time (s)	$\max\left(\lvert u_{ex} - u \rvert\right)$
$n = 16$	Ghasemi [122]	8.47	2.69×10^{-6}
	Shi et al. [123]	0.36	1.34×10^{-4}
	Thesis	0.090	3.23×10^{-6}
$n = 32$	Ghasemi [122]	127	6.73×10^{-7}
	Shi et al. [123]	3.68	3.55×10^{-5}
	Thesis	0.092	5.58×10^{-8}
$n = 64$	Thesis	0.095	2.334×10^{-9}

Problem 3:

Consider rectangular plate $\{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ with governing differential equation as follows

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f\left(x, y\right) \tag{2.54}$$

Right side of the equation is given as follows

$$f(x,y)=\frac{q}{D}\sin(\pi x)\sin(\pi y)\,. \tag{2.55}$$

Boundary conditions are simple support on all four sides of plate.

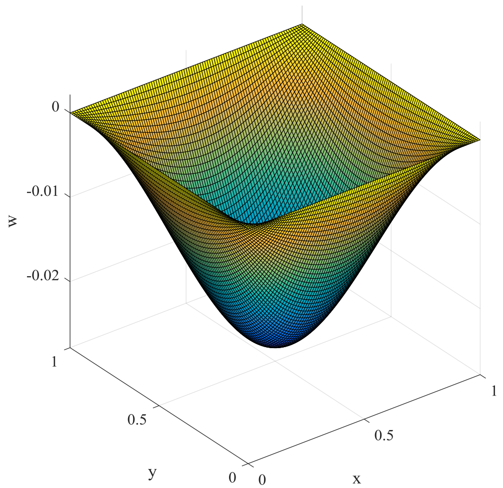


Figure 2.4: PGD solution with simple support boundary condition on all four sides of plate.

Table 2.3: Computational time and error of the bending thin plate problem with simple support boundary condition on all four sides of plate.

	Computational time (s)	$\sqrt{\frac{1}{n_x \times n_y}\sum_{i,j}\left(\left(u_{\text{ex}}\right)_{i,j}-u_{i,j}\right)^2}$	$\max\left(\lvert u_{\text{ex}}-u\rvert\right)$
$n=20$	0.379	1.22×10^{-5}	2.18×10^{-5}
$n=40$	0.412	1.39×10^{-7}	2.51×10^{-7}
$n=60$	0.416	2.76×10^{-8}	5.31×10^{-8}
$n=80$	0.483	4.43×10^{-9}	1.02×10^{-8}
$n=100$	0.545	3.25×10^{-9}	6.47×10^{-9}

Problem 4:

Consider rectangular plate $\{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ with governing differential equation as follows

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y) \tag{2.59}$$

Boundary conditions are clameped on all four sides of plate, and function $f(x, y)$ is given as follows

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & \frac{q}{D} 56400\left(a^2 - 10ax + 15x^2\right)(b - y)^2 y^4 \\ & + \frac{q}{D} 18800x^2\left(6a^2 - 20ax + 15x^2\right) y^2\left(6b^2 - 20by + 15y^2\right), \\ & + \frac{q}{D} 56400(a - x)^2 x^4\left(b^2 - 10by + 15y^2\right) \end{aligned} \tag{2.62}$$

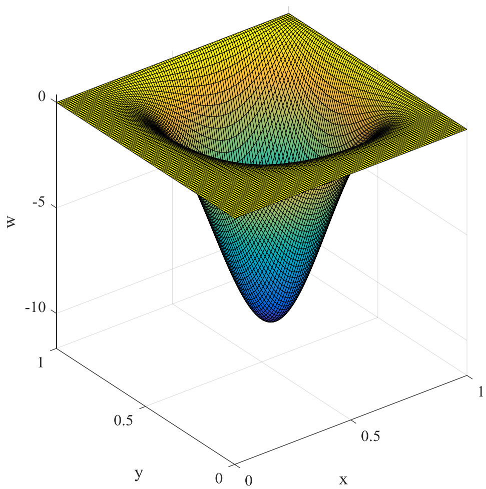


Figure 2.5: PGD solution with clamped boundary condition on all four sides of plate.

Table 2.4: Computational time and error of PGD solution of the bending thin plate problem with clamped boundary condition on all four sides of plate

	Computational time (s)	$\sqrt{\frac{1}{n_x \times n_y}\sum_{i,j}\left(\left(u_{\text{ex}}\right)_{i,j}-u_{i,j}\right)^2}$	$\max\left(\lvert u_{\text{ex}}-u\rvert\right)$
$n=20$	0.184	0.01683	0.03434
$n=40$	0.216	0.00114	0.00232
$n=60$	0.220	2.32×10^{-4}	4.69×10^{-4}
$n=80$	0.304	7.48×10^{-5}	1.50×10^{-4}
$n=100$	0.404	3.15×10^{-5}	6.25×10^{-5}

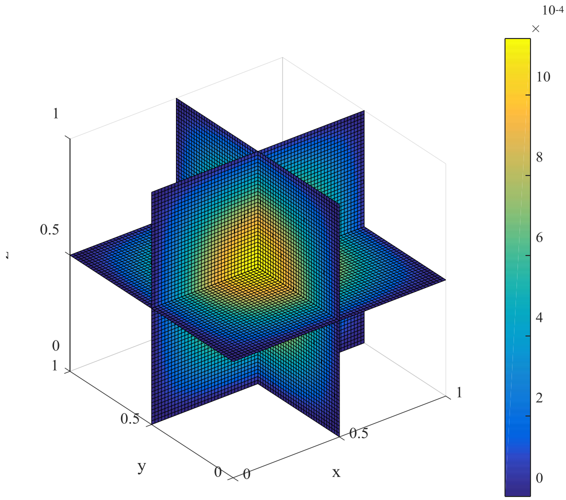
Problem 5:

Consider 3D Biharmonic equation as follows

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}+2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial z^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\partial x^2}\right)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z) \tag{2.64}$$

with boundary conditions

$$u=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\,, \tag{2.65}$$



Hình 2.6: PGD solution of equation (2.64)

Bảng 2.5: Computational time and error of PGD solution of equation (2.64)

	Author	Computational time (s)	$\max(\lvert u_{ex} - u \rvert)$
$n = 16$	Ghasemi [122]	94.1	1.30×10^{-5}
	Shi et al. [123]	2.625	1.62×10^{-6}
	Thesis	0.143	2.38×10^{-6}
$n = 32$	Ghasemi [122]	-	6.37×10^{-6}
	Shi et al. [123]	39.262	4.07×10^{-7}
	Thesis	0.147	2.81×10^{-8}
$n = 64$	Thesis	0.156	1.44×10^{-9}

Chapter 3
PROPER GENERALIZED DECOMPOSTION APPROACH FOR INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOW

3.1. Introduction

In this chapter, we will apply the PGD method to solve the Navier - Stokes equations for the problem of incompressible viscous flow in two-dimensional space. In the equation of the motion of the incompressible viscous flow, the separation between velocity and pressure is shown by the projection method. Later, the PGD method combined with the finite difference method was applied to solve the partial differential equations to find the velocity and pressure of the flow.

3.2. Navier – Stokes equations for the problem of incompressible viscous flow.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{3.2}$$

where $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = (u(\mathbf{x},t), v(\mathbf{x},t))$ is velocity of fluid flow and $p(\mathbf{x},t)$ is pressure of fluid flow. ρ and μ are density and viscoscity of fluid flow.

3.3. Space discretization

When solving Navier - Stokes equations, the special discretization is performed on a staggered grid as shown in Figure 3.1. With the staggered grid, the pressure p is in the cell of midpoint, while the velocities u placed on the vertical cell interface, and the velocity v placed on the horizontal cell interface..

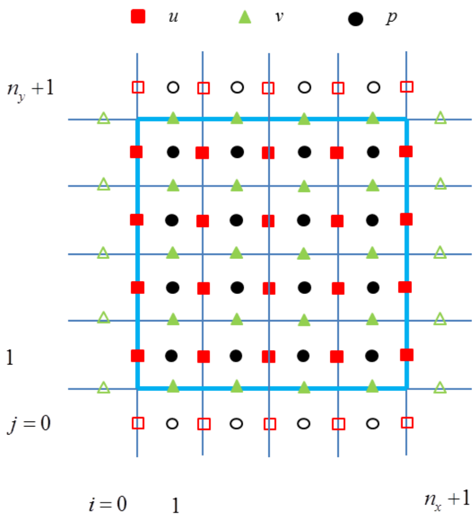


Figure 3.1: Staggered grid.

3.4. General algorithm

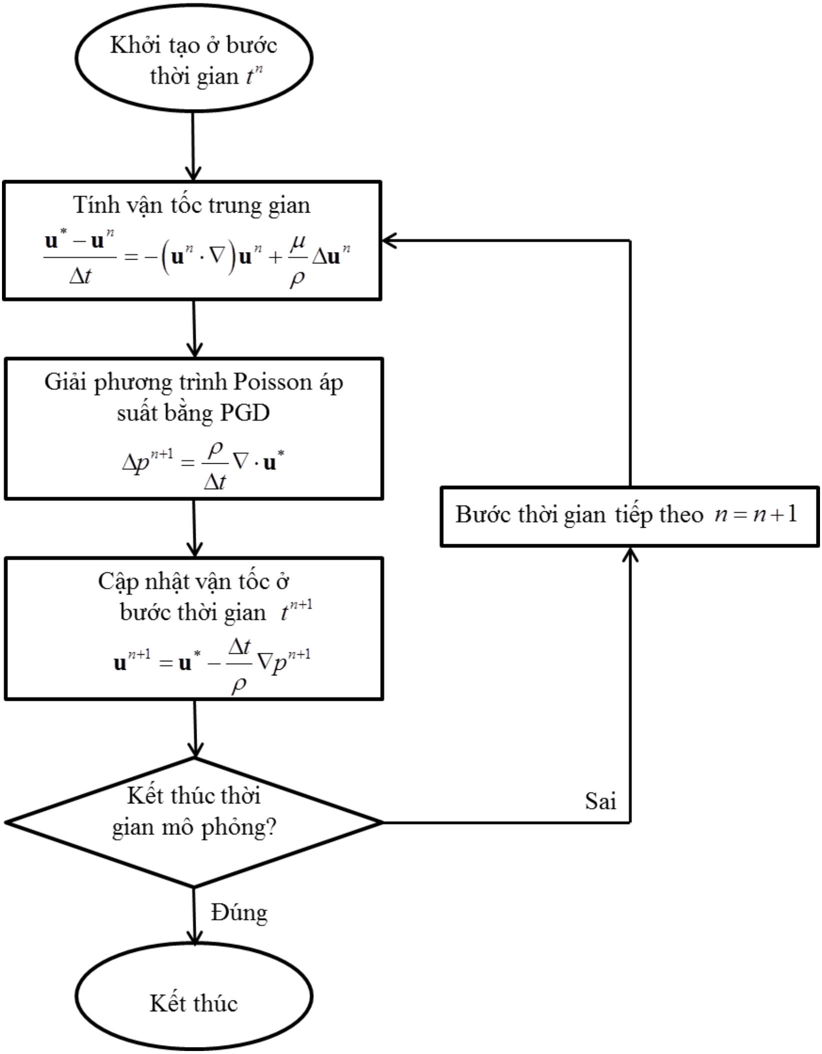


Figure 3.3: Flowchart of PGD method for the problem of incompressible viscous flow.

3.6. Numerical results

3.6.1. The problem of lid-driven cavity flow

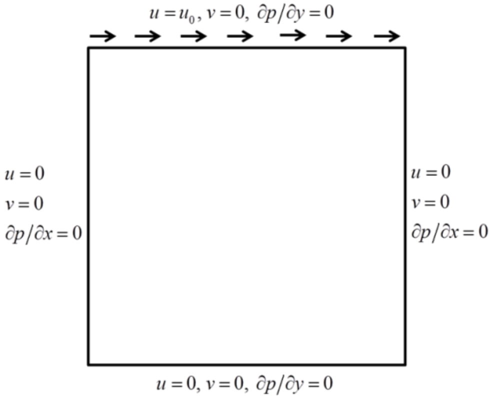
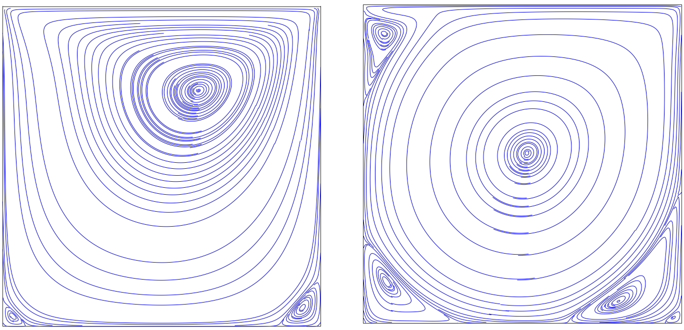


Figure 3.4: The computational domain and boundary conditions for the problem of Lid-driven cavity flow.



Hình 3.9: Streamlines of the problem of Lid-driven cavity flow at $\mathrm{Re} = 100$ and $\mathrm{Re} = 5000$.

Tabe 3.1: Coordinates of primary vortex Reynolds numbers .

		Re = 100	Re = 400	Re = 1000	Re = 3200	Re = 5000
x_c	Ghia et al. [125]	0.617	0.555	0.531	0.517	0.512
	Bruneau et al. [126]	-	-	0.469	-	0.484
	Thesis	0.616	0.5558	0.532	0.518	0.514
y_c	Ghia et al. [125]	0.734	0.606	0.563	0.547	0.535
	Bruneau et al. [126]	-	-	0.563	-	0.539
	Thesis	0.738	0.605	0.566	0.540	0.534

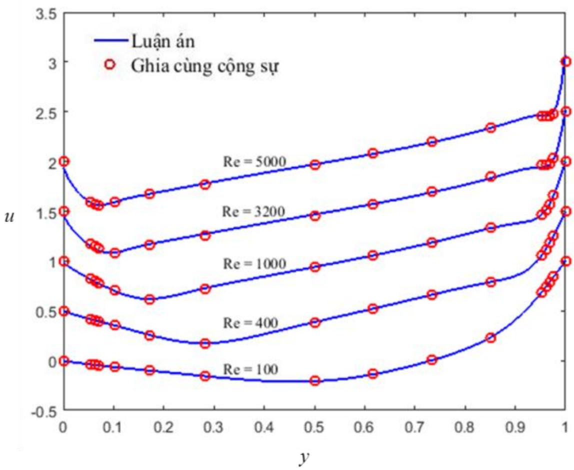


Figure 3.10: Comparison of velocity u along the line $x = 0.5$ with the results of Ghia [125] at $Re = 100$, $Re = 400$, $Re = 1000$, $Re = 3200$ and $Re = 5000$.

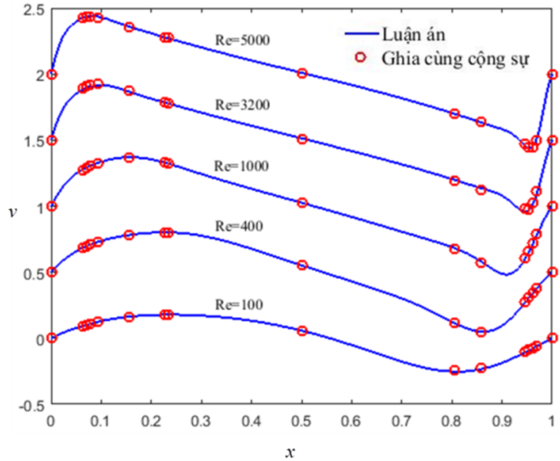


Figure 3.11: Comparision of velocity v along the line $y = 0.5$ with results of Ghia [125] at $Re = 100$, $Re = 400$, $Re = 1000$, $Re = 3200$ and $Re = 5000$.

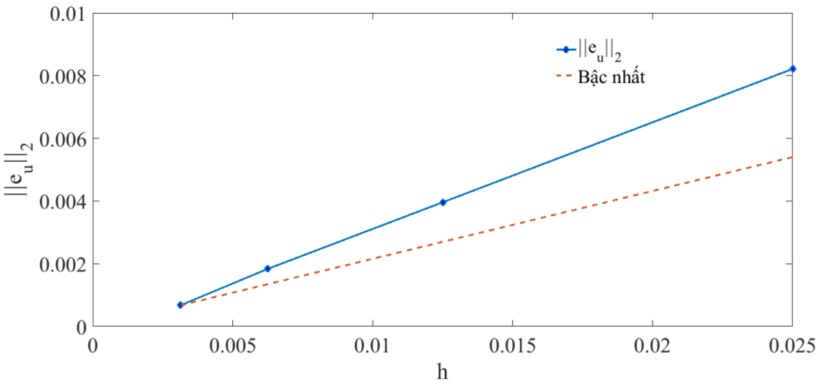


Figure 3.12: Error of the horizontal velocity component as a function of grid spacing for the problem of lid-driven cavity flow.

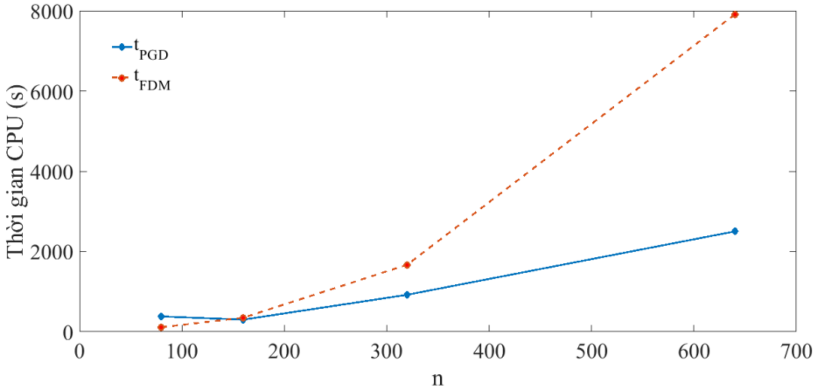


Figure 3.13: CPU time for the PGD and finite difference method solvers for the problem of lid-driven cavity flow at $\mathrm{Re}=100$.

3.2.2. The problem of Backward-facing step flow

The input velocity field is described as a flow parallel wich the lateral velocity component defined as follows

$u(y)=24y(0.5-y)$ với $0\le y\le 0.5$

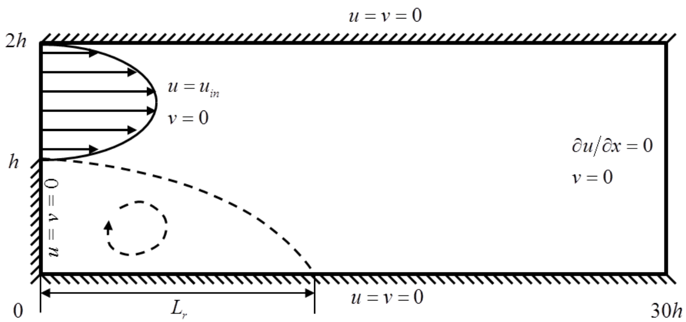


Figure 3.14: The computational domain and boundary conditions for the problem of backward-facing step flow.

Figure 3.15: Streamlines of the problem of Backward-facing step flow at $\mathrm{Re} = 100$.

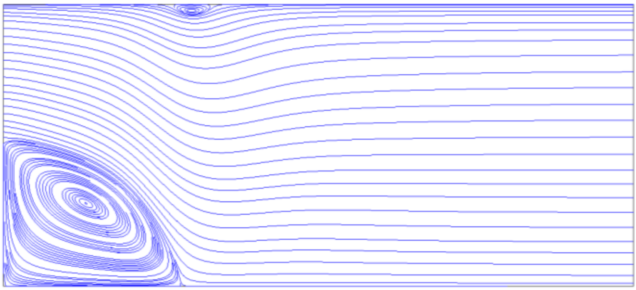


Figure 3.18: Streamlines of the problem of Backward-facing step flow at $\mathrm{Re} = 400$.

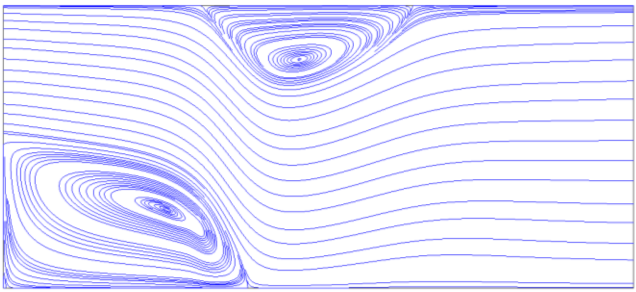


Figure 3.22: Streamlines of the problem of Backward-facing step flow at $\mathrm{Re} = 800$.

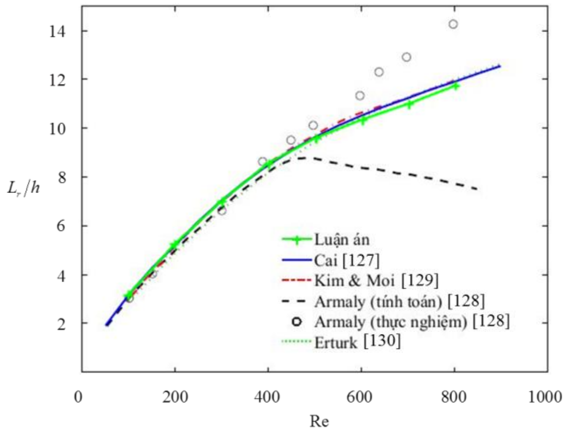


Figure 3.23: Comparision of reattachment length of the problem of Backward-facing step flow.

Chapter 4
COMBINE IMMERSED BOUNDARY METHOD WITH PGD METHOD FOR INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOW PAST RIGID BOUNDARY OBJECTS

4.1. Introduction

In this chapter, it is proposed to combine IBM with PGD method in solving the interaction problem between incompressible viscous flow past rigid boundary objects.

4.2. The equations of motion

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla p=\mu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{f} \tag{4.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{4.2}$$

The force component acting on the fluid

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t)=\int_{\Gamma}\mathbf{F}(s,t)\,\delta\big(\mathbf{x}-\mathbf{X}(s,t)\big)\,ds \tag{4.3}$$

Force at boundary points

$$\mathbf{F}(s,t)=\kappa\big(\mathbf{X}^{e}(s)-\mathbf{X}(s,t)\big) \tag{4.4}$$

The position of points on immersed boundary

$$\frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial t}=\mathbf{U}(s,t)=\mathbf{u}\big(\mathbf{X}(s,t),t\big)=\int_{\Omega}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\,\delta\big(\mathbf{x}-\mathbf{X}(s,t)\big)\,d\mathbf{x} \tag{4.5}$$

4.3. General algorithm

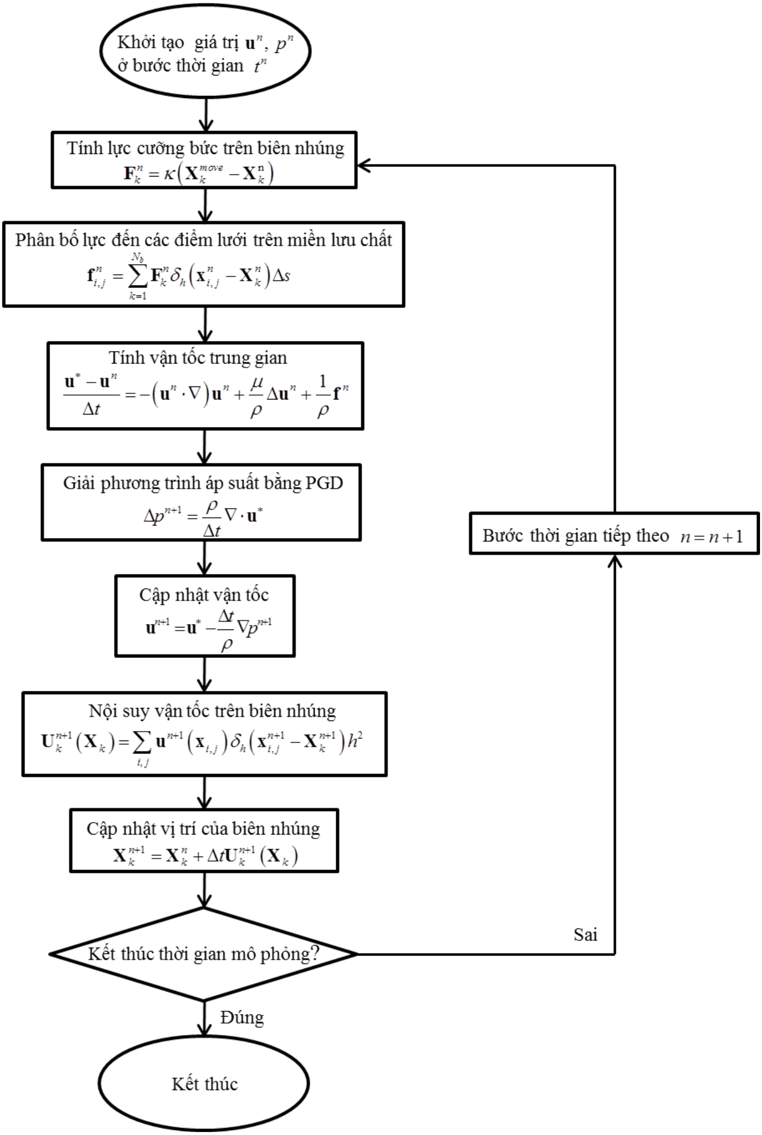


Figure 4.4: Flowchart of combining IB method with PGD method for the problem of incompressible viscous flow past rigid boundary objects.

4.4. Numerical results

4.4.1. The problem of Lid-driven cavity with an embedded cylinder

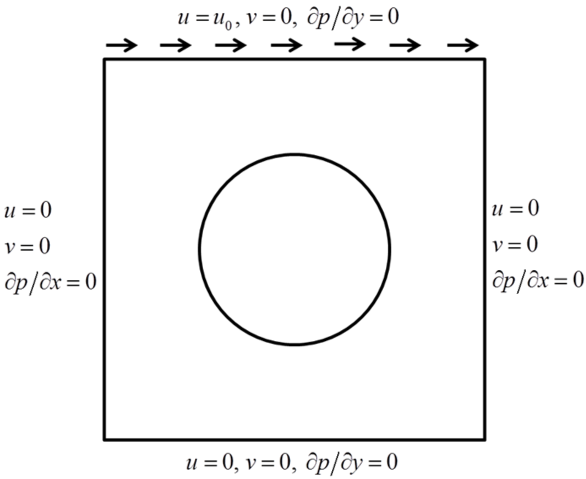


Figure 4.5: The computational domain and boundary conditions of the problem lid-driven cavity with an embedded cylinder.

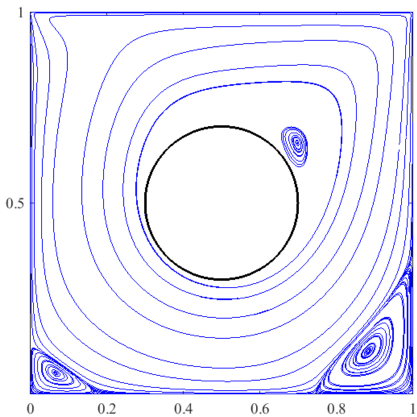


Figure 4.6: Streamlines of the lid-driven cavity flow with a cylinder.

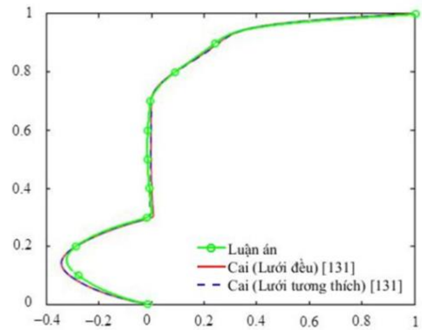


Figure 4.7: The velocity component u along $x = 0.5$

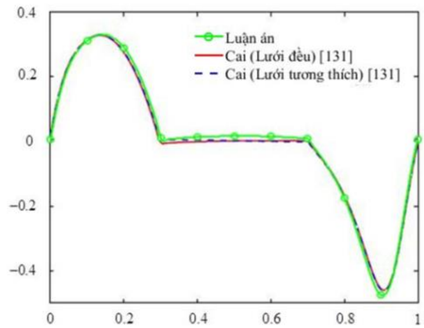


Figure 4.8: The velocity v along $y = 0.5$.

4.4.2. The problem of flow over a stationary circular cylinder

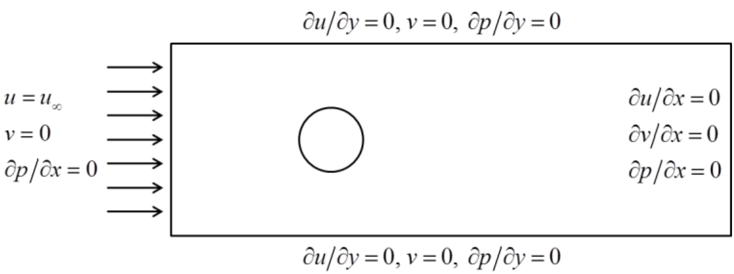


Figure 4.10: The computational domain and boundary conditions of the problem of flow over a stationary cylinder.

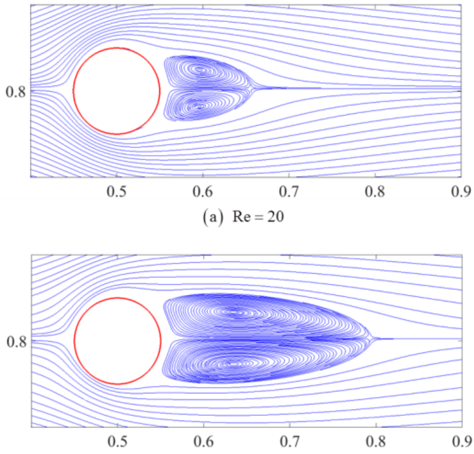


Figure 4.11: Streamlines for the problem flow over a circular cylinder at $Re = 20$ and $Re = 40$

Table 4.1: Length of recirculation zone and drag coefficient at $Re = 20$ and $Re = 40$.

	$\mathrm{Re} = 20$		$\mathrm{Re} = 40$	
	L_w/D	C_d	L_w/D	C_d
Tritton [132]	-	2.22	-	1.48
Coutanceau et al. [133]	0.73	-	1.89	-
Calhoun et al. [134]	0.91	2.19	2.18	1.62
Lima et al. [135]	1.04	2.04	2.55	1.54
Rusell et al. [136]	0.94	2.13	2.29	1.60
Le et al. [84]	0.93	2.05	2.22	1.56
Le et al. [137]	1.05	2.07	2.59	1.58
Kang et al. [138]	0.91	2.09	2.25	1.57
Thesis	1.05	2.27	2.42	1.69

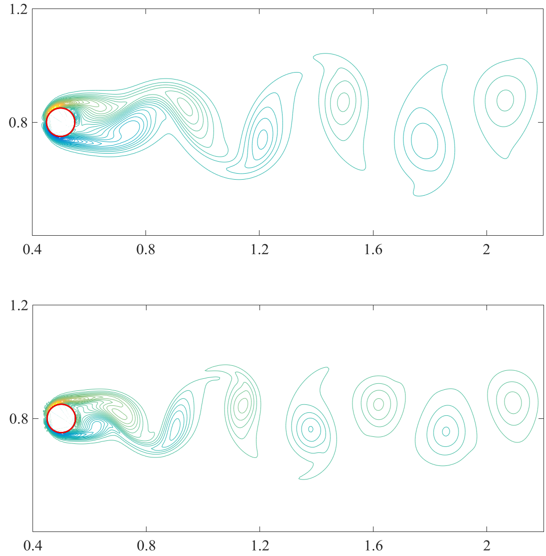


Figure 4.14: Vorticity contours for $Re = 100$ and $Re = 200$.

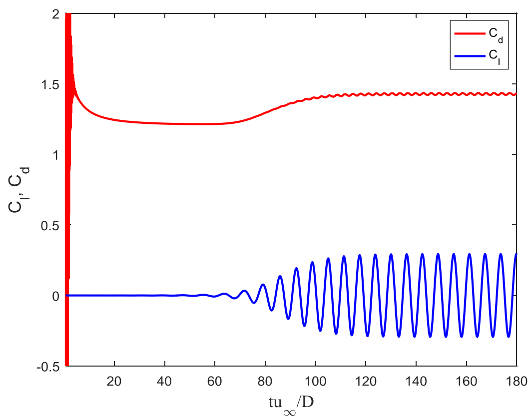


Figure 4.16: Drag coefficient C_l end lift coefficient C_d evolution with respect to the time at $Re = 100$.

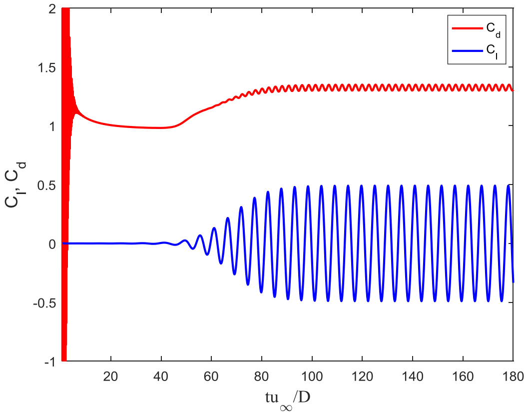


Figure 4.17: Drag coefficient C_l end lift coefficient C_d evolution with respect to the time at $Re = 200$.

Table 4.2: Drag coefficient C_D, lift coefficient C_L, and Strouhal number for $Re = 100$ and $Re = 200$.

	Author	C_d	C_l	St
$Re = 100$	Lai at. al [45]	1.447	±0.330	-
	Calhoun et al. [134]	1.33 ± 0.014	±0.298	0.175
	Rusell et al. [136]	1.38 ± 0.007	±0.300	0.169
	Le et al. [84]	1.37 ± 0.009	±0.323	0.160
	Le et al. [137]	1.39 ± 0.009	±0.346	0.160
	Kang et al. [138]	1.399	±0.343	0.162
	Thesis	1.43±0.007	±0.294	0.161
$Re = 200$	Calhoun et al. [134]	1.17 ± 0.058	±0.67	0.202
	Rusell et al. [136]	1.29 ± 0.022	±0.50	0.195
	Le et al. [84]	1.34 ± 0.030	±0.43	0.187
	Le et al. [137]	1.38 ± 0.040	±0.67	0.192
	Thesis	1.32 ± 0.025	±0.491	0.189

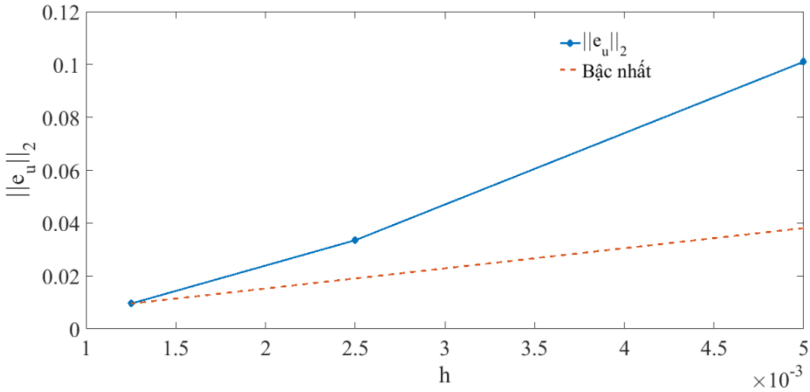


Figure 4.18: Error of the horizontal velocity component as a function of grid spacing for the problem of flow over a circular cylinder at $Re = 100$.

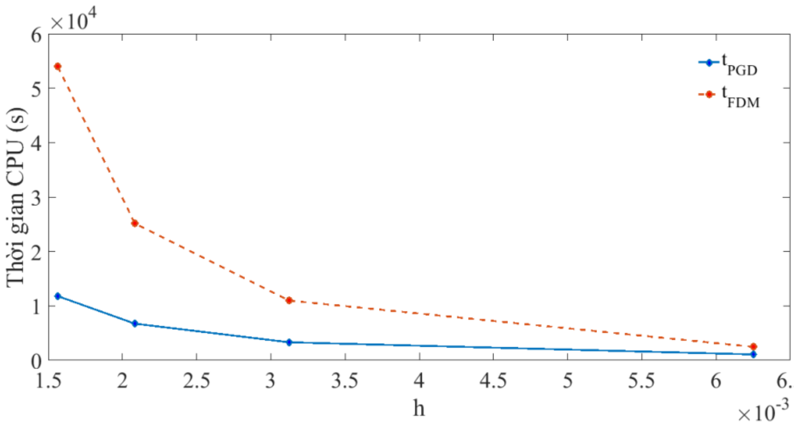


Figure 4.19: CPU time for the PGD and finite difference method solvers for the problem of flow over a circular cylinder at $\mathrm{Re} = 100$.

4.4.3. In-line oscillationg circular cylinder in a fluid at rest

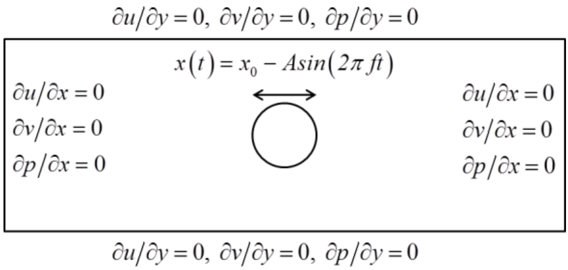


Figure 4.20: The computational domain and boundary conditions of the problem of In-line oscillationg circular cylinder in a fluid at rest.

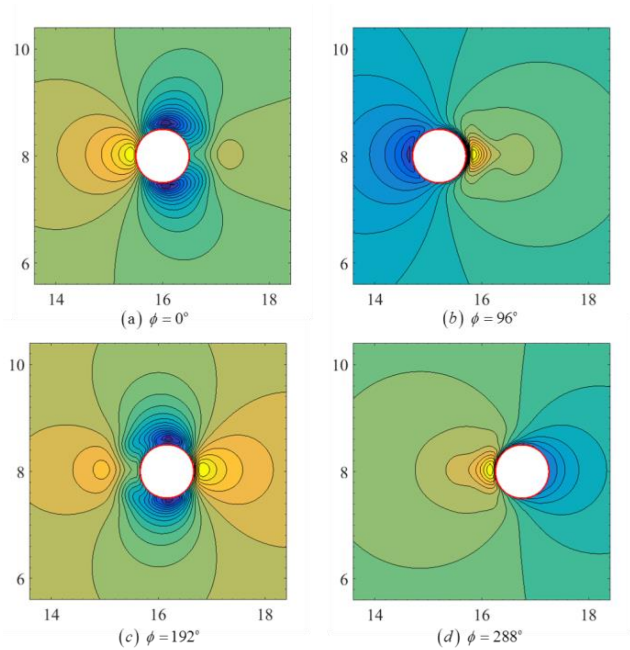


Figure 4.21: Pressure contours at four different phases: $\phi = 2\pi ft = 0^{\circ}$, 96° , 192° , 288° .

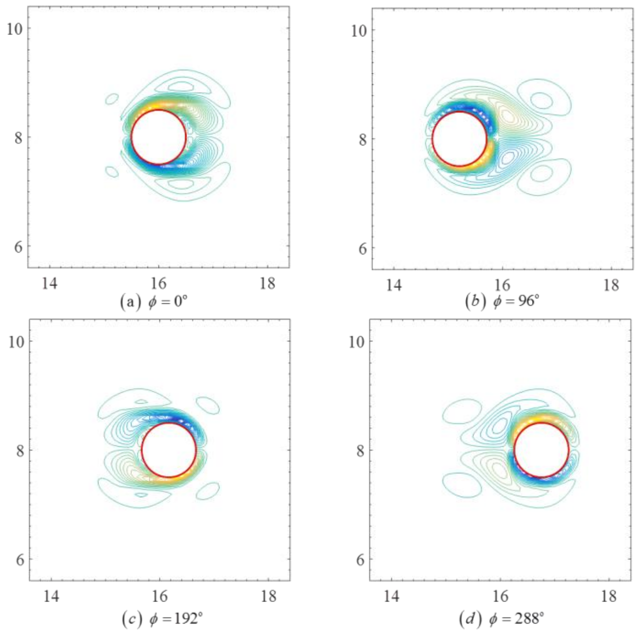


Figure 4.22: Vorticity contours at four different phases:
$\phi = 2\pi ft = 0^{\circ}$, 96° , 192° , 288° .

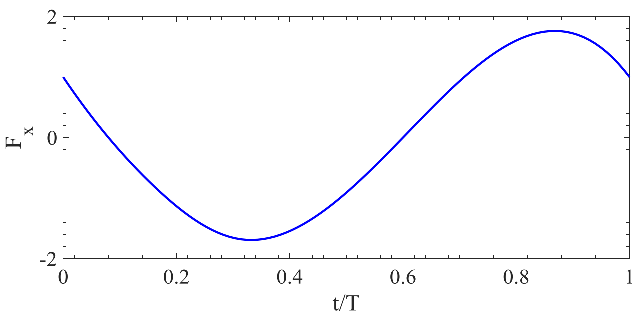


Figure 4.23: The in-line force in a period for In-line oscillationg circular cylinder in a fluid at rest.

4.4.4. The problem of transverse oscillation of a circular cylinder in a free-stream

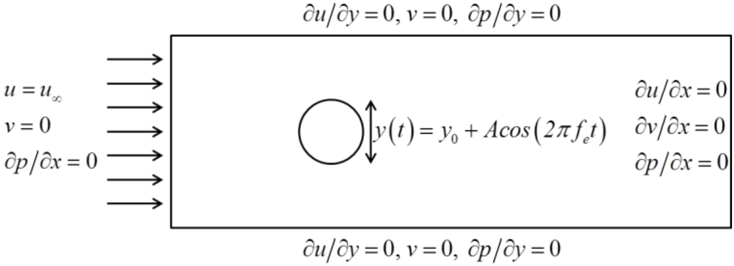


Figure 4.24: The computational domain and boundary conditions of the problem of transverse oscillation of a circular cylinder in a free-stream.

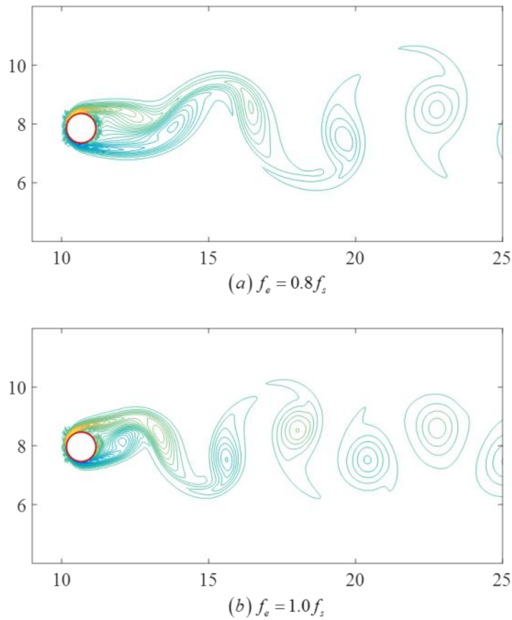
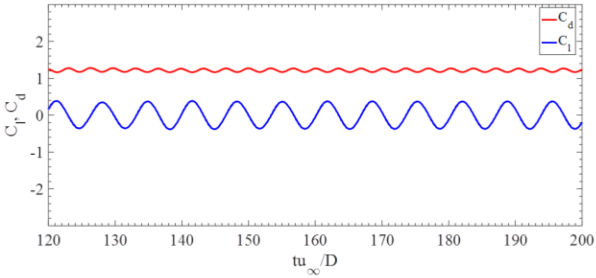
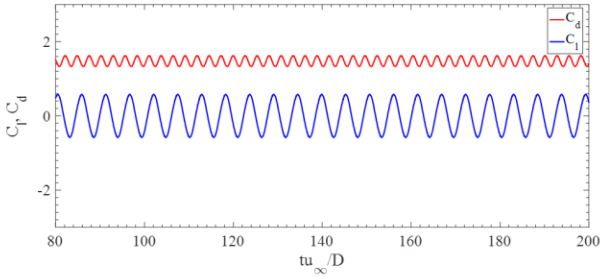


Figure 4.25: Instaneous vorticity fields for the transversely oscillation circular cylinder problem for $f_e = 0.8 f_s$ and $f_e = 1.1 f_s$.



(a) $f_e = 0.8 f_s$



(b) $f_e = 1.0 f_s$

Figure 4.26: Lift coefficient and drag coefficient for the problem of transverse oscillation of a circular cylinder in a free-stream for $f_e = 0.8 f_s$ and $f_e = 1.1 f_s$.

Table 4.3: The mean, rms drag and lift coeficients for the problem of transverse oscillation of a circular cylinder in a free-stream.

	Author	$\bar{C}_d$	$\left(C_d^{'}\right)_{rms}$	$\left(C_l^{'}\right)_{rms}$
$f_e/f_s = 0.8$	Guilmineau & Queutey [140]	1.194	0.038	0.074
	Kim & Choi [30]	1.235	0.037	0.068
	Uhlmann [57]	1.380	-	0.176
	Yang et al. [63]	1.290	0.043	0.070
	Cai [127]	1.229	0.036	0.235
	Thesis	1.217	0.035	0.239
$f_e/f_s = 1.0$	Guilmineau & Queutey [140]	1.506	0.134	0.420
	Kim & Choi [30]	1.537	0.140	0.376
	Cai [127]	1.511	0.117	0.442
	Thesis	1.477	0.102	0.436

Chapter 5
COMBINE IMMERSED BOUNDARY METHOD WITH PGD METHOD FOR INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOW PAST ELASTIC BOUNDARY OBJECTS

5.1. Introduction

In this chapter, it is proposed to combine IB method with PGD method to solve problems of incompressible viscous flow through elastic boundary. The effect of the elastic boundary on fluid is replaced by introducing the forced force component into the fluid motion equation through IB method. The decomposition between pressure and velocity is presented by projection method, after which the PGD method is applied to solve partial differential differential equations to find flow variables.

5.2. The equations of motion

$$\rho(\mathbf{x},t)\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right)=-\nabla p+\mu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{f}(\mathbf{x},t)-\rho(\mathbf{x},t)\mathbf{g} \tag{5.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{5.2}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t)=\int_{\Gamma}\mathbf{F}(s,t)\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{X}(s,t)\right)ds \tag{5.3}$$

$$\rho(\mathbf{x},t)=\rho_f+\int_{\Gamma}\rho_s(s)\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{X}(s,t)\right)ds \tag{5.4}$$

5.3. General algorithm

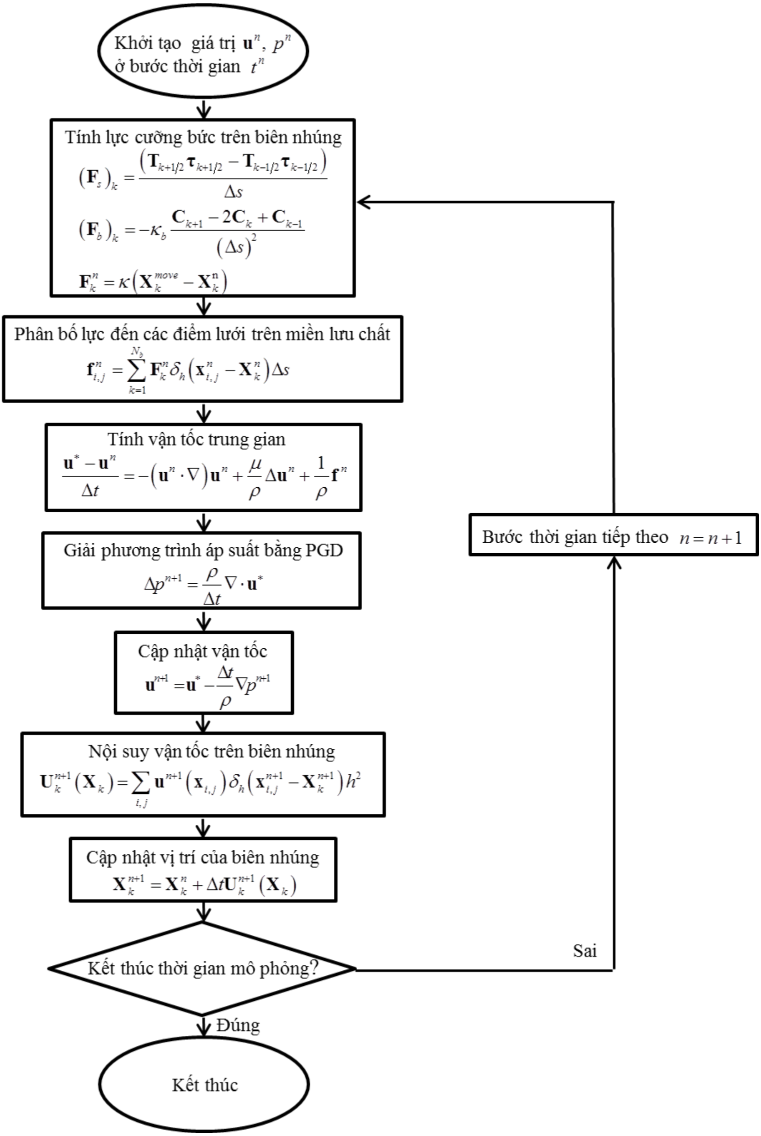


Figure 5.3: Flowchart combining IB method with PGD method for the problem of incompressible viscous flow past elastic boundary objects.

5.4. Numerical results

5.4.1. The problem of a filament in a incompressible viscous flow

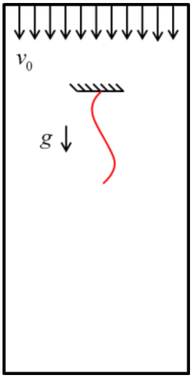


Figure 5.4: Schematic diagram of the computational configuration: a filament in incompressible viscous flow

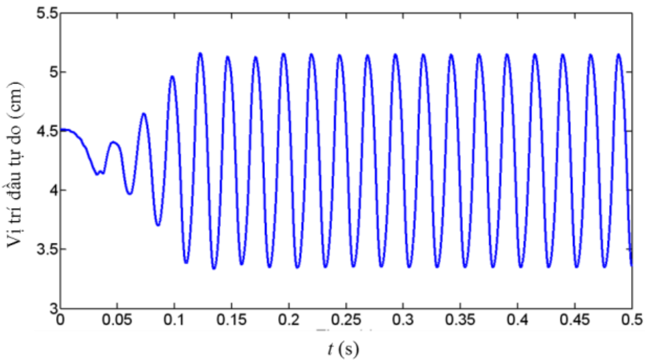


Figure 5.8: The *x*-coo*rdinate* of the filament free end

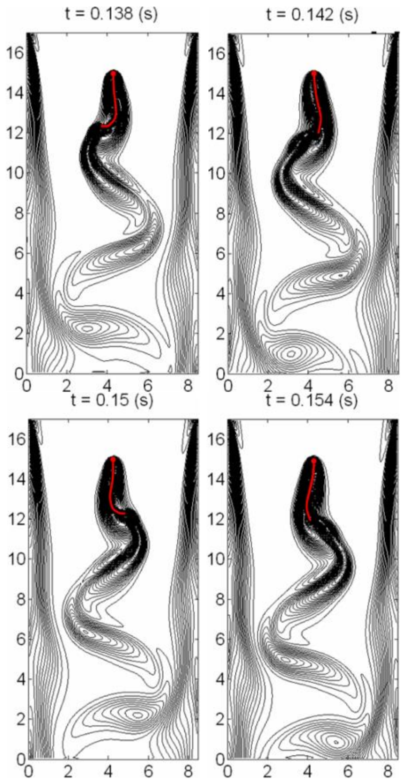


Figure 5.6: The filament with mass in an incompressible viscous flow.

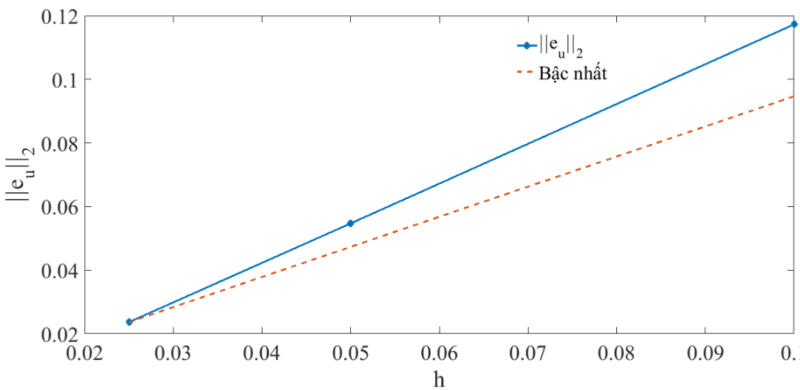


Figure 5.9: Error of the horizontal velocity component as a function of grid spacing for the problem of a filament in incompressible viscous flow.

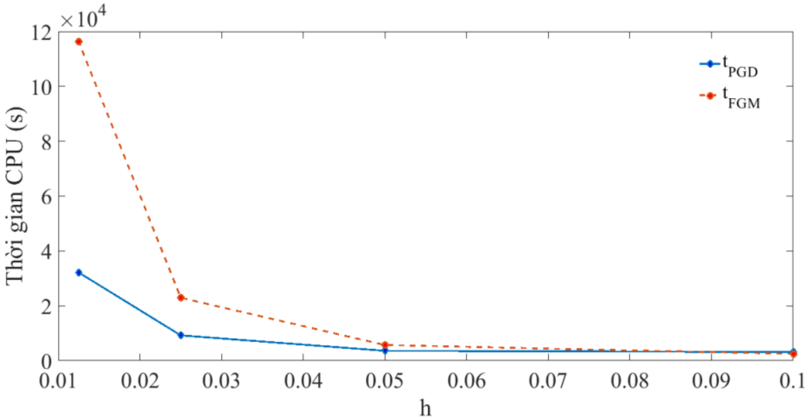


Figure 5.10: CPU time for the PGD and finite difference method solvers.

5.4.2. The problem of two filaments in a incompressible viscous flow.

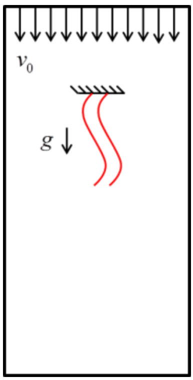


Figure 5.11: Schematic diagram of the computational configuration: two filaments in a incompressible viscous flow

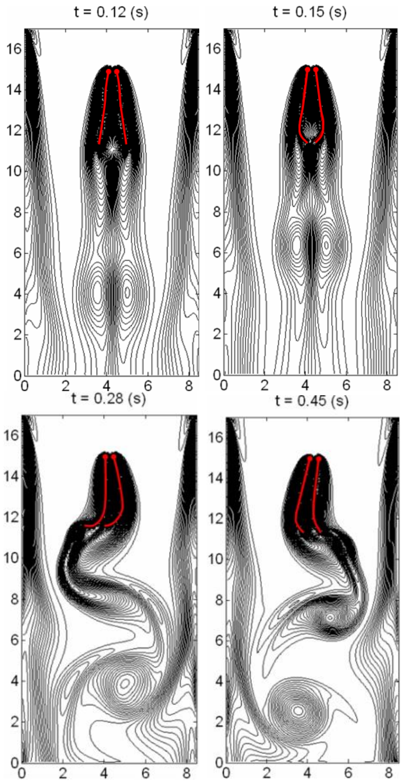


Figure 5.12: Two filaments in an incompressible viscous flow with $d = 0.1L$

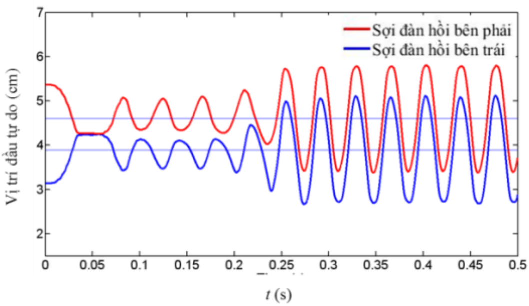


Figure 5.14: The *x-coordinate* of two filament free ends as functions of time with $d = 0.1L$.

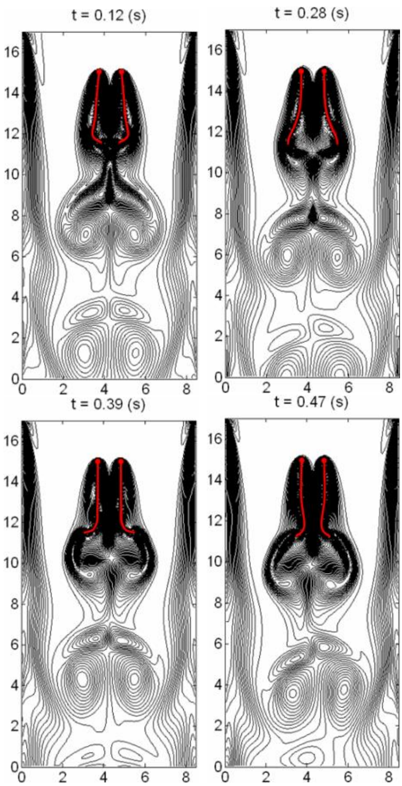


Figure 5.15: Two filaments in an incompressible viscous flow with $d = 0.3L$.

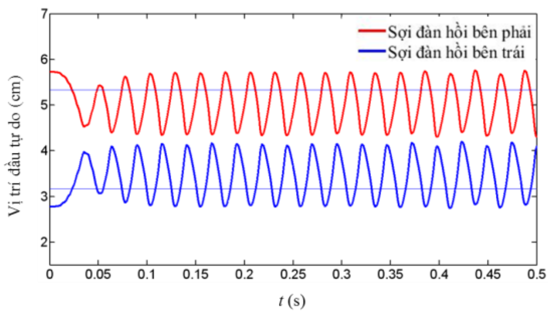


Figure 5.17: The x-*coordinate* of two filament free ends as functions of time with $d = 0.3L$.

5.6.3. The problem of a closed elastic fiber in a rest fluid.

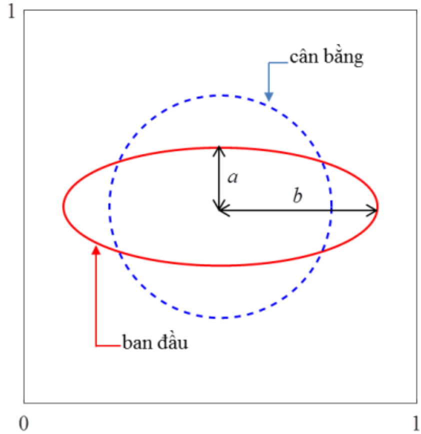


Figure 5.18: The initial configurations and the equilibrium state of closed elastic fiber.

Table 5.3: Compare "area loss" at $t = 0.020$ s

Tác giả	Số điểm lưới lưu chất $n_x \times n_y$	Số điểm rời rạc màng đàn hồi n_b	Diện tích tính toán A	Diện tích mất mát %
Stockie và cộng sự [144]	64×64	192	-	4.4
Stockie [145]	64×64	192	-	7.6
Luận án	64×64	192	0.2401	4.7

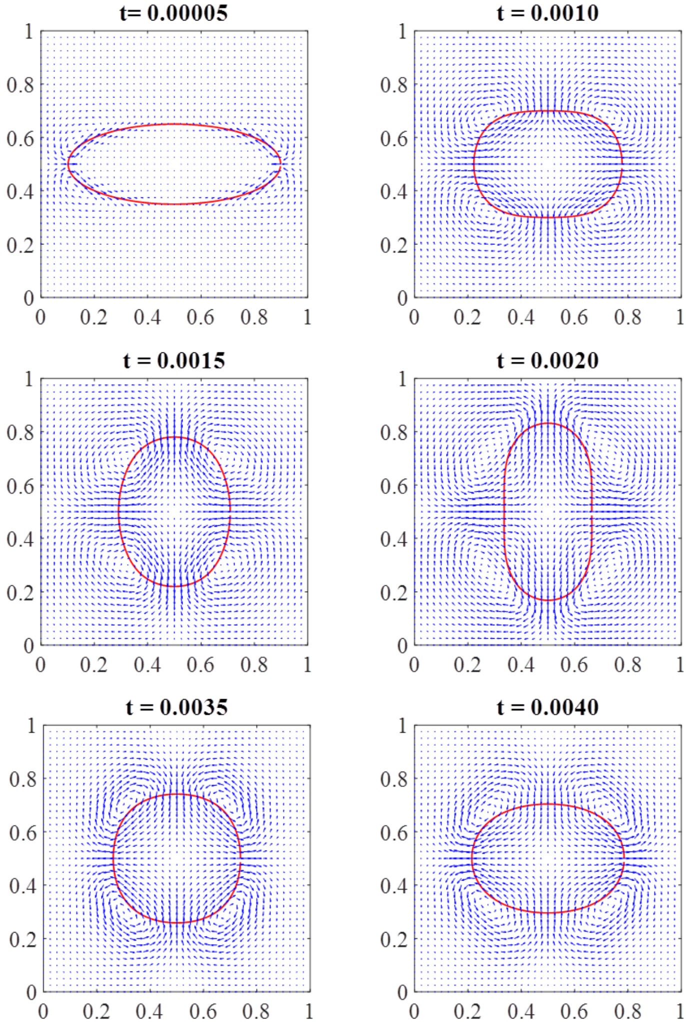


Figure 5.19: Velocity field and profile of closed elastic fibers at different times.

Chapter 6
CONLUSIONS AND FUTURE WORK

6.1. Conlusions

Through the results obtained, the thesis draws some conclusions as follows:

- The thesis has applied PGD method in combination with finite difference method to solve high-order partial differential equations in two-dimensional and three-dimensional space. The calculation results show the remarkable speed of calculation of the PGD method with reference results..
- The thesis has solved the problems of incompressible viscous flow at many boundary conditions and different physical domains by PGD method combined with finite difference method.
- The thesis has proposed combining the immersed boundary method in combination with PGD method to exploit the advantages of each method to solve the interaction problems between the fluid and rigid objects.
- Applying embedded boundary method and PGD method to solve problems of uncompressed viscous flow through elastic boundary obstacles. The survey results presented and compared with the research results show very good consensus of the method that the thesis has proposed.

6.2. Future work

Throughout the research process, the thesis has encountered some difficulties and certain limitations exist. Here are some extended research directions of the thesis in the near future:

- Research and develop PGD method to handle problems with more complex boundary conditions.
- Extend the proposed method for more complex solid-liquid interaction problems such as: combining heat transfer, problems in the case of compressible viscous flow, or similar problems with turbulent flow.
- Extend the application of the proposed method to fluid-structure interaction problems in three dimensions.
- Extending the combination of PGD with other numerical methods such as isogeometric analysis, finite elements, radial basis function, ... to find effective solutions.